INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

T2. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

2.1 Optimización restringida

En los problemas económicos de optimización suelen aparecer un cierto número de restricciones (o ligaduras) entre las variables de decisión que, en general, acotan el dominio en el que se desenvuelve la **función objetivo** que tratamos de optimizar.

Es decir, que en el problema de optimización de una función de varias variables, tales variables de decisión no son en general independientes, sino que están relacionadas entre sí por un conjunto de condiciones adicionales.

El problema consiste en optimizar una función de n variables $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sujeta a las m condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m \end{array}\right\}$$

siendo $m < n$.

2.2 Método general para la investigación de extremos condicionados: el método de sustitución

Consiste en optimizar una función objetivo sujeta a unas ecuaciones de restricción.

Optimizar la función objetivo:

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

sujeta a las siguientes ecuaciones de restricción:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m \end{array}\right\}$$

siendo $m < n$.

Y ahora sustituimos las restricciones en la función objetivo, y tendremos un programa con n-m variables, y sin ninguna restricción.

¿Y como se optimiza esta nueva expresión de la función objetivo?

Pues para optimizar la nueva función z, bastará con aplicar a esta función los métodos de optimización clásica libre que hemos estudiado en el tema anterior.

Este método es conocido como **método de sustitución**, y nos permite pasar de una optimización restringida con restricciones de igualdad, a una optimización clásica libre sin ningún tipo de restricción.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

¿Como han de ser n y m?

Se supone siempre que el número de variables n y el número de restricciones m son finitos, y además n > m.

A la diferencia **n-m** se le llama al **número de grados de libertad**.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}\min\ x^2+y^2\\ x+y=3\end{array}\right\}\ \text{es equivalente a}\ \min\ x^2+(3-x)^2$$

La función objetivo es ahora una función con una variable menos:

$$f(x)=x^2+(3-x)^2$$

$$f'(x)=2x-2(3-x)=4x-6=0$$

Por tanto, $x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=y$

$$f''(x)=4>0$$

Entonces, $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ es mínimo restringido o condicionado.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

EJERCICIO 1

La función de utilidad de un determinado consumidor es: $u(x, y) = \ln(2 + xy)$, *donde* x e y son las cantidades consumidas de los bienes P y M cuyos precios unitarios son de 1 euro, respectivamente. Si el consumidor dispone de una renta total de 8 euros para consumir y la gasta en su totalidad.

Calcular qué cantidad de los bienes debe comprar para maximizar su utilidad

2.2.1 Máximo libre versus máximo restringido

En general, un **máximo restringido** tomará un valor menor que un máximo libre, aunque casualmente pudiera suceder que los dos máximos tomasen el mismo valor. Sin embargo el **máximo restringido** nunca podrá superar al máximo libre.

¿Son frecuentes estos problemas de optimización restringida?

En economía suelen aparecer con frecuencia, así por ejemplo cuando se trata de maximizar una función de producción, o una función de utilidad, sometidas a una restricción presupuestaria.

Para resolver estos problemas se puede aplicar el método de sustitución, aunque la dificultad de este método aumenta con el número de restricciones que aparecen, pues se complica en gran medida la obtención de relaciones entre variables, así que muchas veces tendremos utilizar otros métodos alternativos por ejemplo el **método de Lagrange**.

2.3 Método de los multiplicadores de Lagrange

Este método consiste en convertir un problema de optimización restringida en otro problema tal que pueda seguir aplicándose la condición de primer orden del problema de la optimización libre.

2.3.1 Método de Lagrange para dos variables

Estudio de una función con dos variables independientes y una restricción

$$\begin{aligned} \text{Optimizar:} \quad & z = f(x,y) \\ \text{sujeto a:} \quad & g(x,y) = b \end{aligned}$$

La función Lagrangiana L será:

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda[g(x,y) - b]$$

La **condición necesaria** de primer orden exige que se cumpla:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Si llamamos **Hessiano Orlado** $\overline{H}$ al siguiente determinante:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix}$$

Se demuestra que:

1. Existirá un **máximo si** $\overline{H} > 0$
2. Existirá un **minimo si** $\overline{H} < 0$

2.3.2 Método de Lagrange para tres variables

Función objetivo con tres variables independientes y una restricción

$$\text{Optimizar: } z = f(x, y, u)$$
$$\text{sujeto a: } g(x, y, u) = b$$

La función Lagrangiana L es:

$$L = z + \lambda[g(x, y, u) - b]$$

a) **Condición necesaria:** Nos permitirá obtener los puntos críticos, y exige que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema de tres ecuaciones, que juntamente con la restricción $g(x, y, u) = b$, nos posibilitan obtener los valores (x_0, y_0, u_0) críticos, de posibles máximos o mínimos, y asimismo saber cuál es el valor del parámetro λ o multiplicador de Lagrange.

b) **Condición suficiente:** A través del Hessiano Orlado, y sus menores principales, nos permitirá asegurar qué puntos críticos son máximos y cuales son minimos.
Llamaremos Determinante Orlado $\overline{H}$, en este caso, al siguiente determinante:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_u \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} & L''_{xu} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} & L''_{yu} \\ g'_u & L''_{ux} & L''_{uy} & L''_{u^2} \end{vmatrix}$$

Asimismo, llamaremos $\overline{H}_2$, al menor principal de $\overline{H}$ consistente en suprimir la última fila y la ultima columna en el Hessiano Orlado $\overline{H}$, es decir:

$$\overline{H}_2 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix}$$

Pues bien, se demuestra que:

1.- Existirá máximo si $\overline{H}_2 > 0$ y $\overline{H} < 0$

2.- Existirá mínimo si $\overline{H}_2 < 0$ y $\overline{H} < 0$

2.3.3 Método de Lagrange para n variables

Función objetivo con n variables independientes y m restricciones

Optimizar: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con las m restricciones:

$$\left.\begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \end{array}\right\}$$

La función Lagrangiana será:

$$L = z + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i] \qquad i = 1,2, \dots, m$$

a) **Condición necesaria:** Obtendremos con ella los posibles puntos críticos, y exige que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

b) **Condición suficiente:** A partir del Hessiano Orlado $\overline{H}$, y sus menores principales, podremos saber si existe realmente máximo o mínimo.

Omitiendo la demostración, llamaremos **"Hessiano Orlado"** en este caso, al siguiente determinante $\overline{H}$

$$\overline{H} = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & g'_{11} & g'_{12} & \cdots & g'_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g'_{21} & g'_{22} & \cdots & g'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g'_{m1} & g'_{m2} & \cdots & g'_{mn} \\ \hline g'_{11} & g'_{21} & \cdots & g'_{m1} & L''_{11} & L''_{12} & \cdots & L''_{1n} \\ g'_{12} & g'_{22} & \cdots & g'_{m2} & L''_{21} & L''_{22} & \cdots & L''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g'_{1n} & g'_{2n} & \cdots & g'_{mn} & L''_{n1} & L''_{n2} & \cdots & L''_{nn} \end{array}\right|$$

$$siendo\ \ L''_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\ \ y\ \ g'_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

A partir del Hessiano Orlado $\overline{H}$ pueden formarse distintos menores principales orlados. Asi el que contiene a L''_{ii} como último elemento de su diagonal principal se denota por $\overline{H}_i$, y su expresión será:

$$\overline{H}_i = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & g'_{11} & \cdots & g'_{1i} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & g'_{m1} & \cdots & g'_{mi} \\ \hline g'_{11} & \cdots & g'_{m1} & L''_{11} & \cdots & L''_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g'_{1i} & \cdots & g'_{mi} & L''_{i1} & \cdots & L''_{ii} \end{array}\right|$$

Una **condición suficiente** de optimalidad es:

- Si los últimos $(n-m)$ menores principales orlados tienen el mismo signo de $(-1)^m$, entonces en el punto $\bar{x}_0$ existira un **mínimo** relativo o local. Es decir, los últimos $(n-m)$ menores principales deben ser todos positivos si m es par, y todos negativos si m es impar.
- Si los últimos $(n-m)$ menores principales orlados tienen el **signo alternado,** comenzando por $(-1)^{m+1}$, entonces en el punto $\bar{x}_0$ existirá un **máximo** relativo o local. El signo alternado exige que si m es **par** el **primero** sea negativo y si m es **impar** entonces el primero debe ser positivo. (Nota: se entiende por "primero" el de menor orden).

2.4 Condición suficiente de Optimalidad Global

- Se demuestra que si la función objetivo f, es una función **cóncava** y el conjunto factible S, es un conjunto convexo entonces todo punto factible que verifique la condición de Lagrange, será necesariamente un **máximo global**, constituyendo en este caso la condición de Lagrange una condición necesaria y suficiente de optimalidad global.

- Se demuestra que si la función objetivo f, es una función **convexa** y el conjunto factible S, es un conjunto convexo entonces todo punto factible que verifique la condición de Lagrange, será necesariamente un **mínimo global**, constituyendo en este caso la condición de Lagrange una condición necesaria y suficiente de optimalidad global.

Además, en el caso de que f sea **estrictamente cóncava** (convexa), se tiene la **unicidad** del **máximo (mínimo) global.**

Cuando el conjunto factibles está definido mediante restricciones de igualdad, solo se obtienen conjuntos factibles convexos si las funciones que definen la restricciones son lineales.

2.5 Interpretación matemática de los multiplicadores de Lagrange

Al estudiar los óptimos restringidos, hemos supuesto hasta ahora que en las ecuaciones de restricción los términos independientes b_i eran constantes. Pero ¿qué sucedería si una vez obtenida la solución óptima, supiéramos que los beta pueden modificarse?

Es decir, vamos a efectuar un análisis de sensibilidad, que nos va a permitir, una vez logrado el óptimo, estudiar cuál es la variación experimentada por la función objetivo cuando varían los términos independientes b_i de la restricciones.

Si la variación experimentada por el término independiente b_k (uno de los m términos independientes b_i) puede considerarse infinitesimal, es decir muy pequeño, entonces se demuestra que el opuesto del valor del multiplicador asociado en el óptimo, es igual a la variación de la función objetivo en el óptimo, Y cuando se modifica de manera infinitesimal el término independiente b_i de la restricción.

Si f toma el valor óptimo en x^*, entonces $\dfrac{df(x^*)}{db_k} = -\lambda_k$ ó también $df(x^*) = -\lambda_k db_k$.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871

2.6 Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

El multiplicador de la Lagrange es la tasa de variación del valor óptimo de la función objetivo cuando la constante de restricción cambia.

Hemos visto anteriormente que el opuesto del k-ésimo multiplicador de Lagrange mide el cambio marginal en el valor óptimo de la función objetivo con respecto a la variación del término independiente de la k-ésima restricción b_k .

Los multiplicadores de Lagrange pueden tener sentido económico. Los multiplicadores de Lagrange equivalen a derivadas parciales y en economía estás derivadas son sinónimo de término marginal. Por ello, los multiplicadores pueden interpretarse como **cambios marginales.** Por ejemplo:

- **En la planificación de la producción**

El opuesto del k-ésimo **multiplicador de Lagrange** no señala el aumento del beneficio máximo provocado por la disponibilidad de 1 unidad más más del k-ésimo recurso b_k. Dicho de otra manera, nos medirá la **rentabilidad marginal** del recurso o factor b_k.

- **En la maximización de la utilidad**

Así, si suponemos que el consumidor trata de maximizar la función de utilidad sujeta a la ecuación de la restricción presupuestaria, donde b no señala la renta disponible ¿qué nos señalaría el multiplicador?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange nos medirá la **utilidad marginal** de la **renta** en el punto óptimo.

- **En la minimización de los costes**

Si una empresa desea minimizar su función de costes, estando éstos sujetos a una concreta restricción de producción ¿qué no señala el multiplicador?

El valor opuesto del multiplicador de Lagrange nos medirá el **coste marginal** de producir una unidad de producto más, a partir del punto óptimo.

INFO@ADEFACIL.COM

Elena Gonzalo
671 227 871