



Qué vas a aprender.

Qué es un **límite** y cómo se calcula: por **sustitución directa** y resolviendo las **indeterminaciones** más frecuentes ($0/0$, ∞/∞ , $\infty - \infty$ y 1^∞). Y, sobre todo, a estudiar el límite de una función de **dos variables** con los **límites reiterados**, los **límites radiales** y el teorema **cero por acotada**.

⚠ Lee esto antes de empezar.

Este tema **entra en el examen**: junto con el Tema 5 forma el bloque «Límites y continuidad en varias variables», al que el plan docente dedica **3 de las 10 preguntas**. Las preguntas son de **varias variables**: los límites de una variable (apartados 1 a 8) son la introducción y la herramienta para resolverlas.

Mapa del tema

Para qué sirve cada apartado

Una variable (introducción)

1. Definición formal de límite
2. Límites laterales
3. Límites que no existen
4. Límites infinitos ($x \rightarrow a$)
5. Límite en el infinito o límite finito para $x \rightarrow \infty$
6. Infinitésimos e infinitos
7. Técnicas básicas de cálculo
8. Estudio de resolución de formas indeterminadas específicas

Varias variables (examen · T5)

9. Definición formal de límite en varias variables
10. Generalización del concepto de límite: límites infinitos y en el infinito
11. Límites sucesivos o reiterados
12. Dependencia del camino · límites radiales
13. Técnicas algebraicas · cero por acotada

💡 **Idea clave.** El límite no mira el **valor** de la función en el punto, sino hacia dónde **tiende** cuando nos acercamos a él. En una variable solo hay dos formas de acercarse (por la izquierda y por la derecha). En dos variables hay **infinitos caminos**, y el límite solo existe si por todos ellos se obtiene el mismo valor.

1 Definición formal de límite

Definición ε - δ

Definición. Sea f una función definida en todos los puntos del intervalo (a, b) , salvo tal vez en $x_0 \in (a, b)$. En x_0 , $f(x)$ puede no tener valor ninguno, o tener valor cualquiera. Por esa razón x tiende $x \rightarrow x_0$ y no $x = x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\varepsilon)) / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- $|x - x_0|$ mide la **distancia** entre x y x_0 .
- $|f(x) - L|$ mide la **distancia** entre $f(x)$ y L .

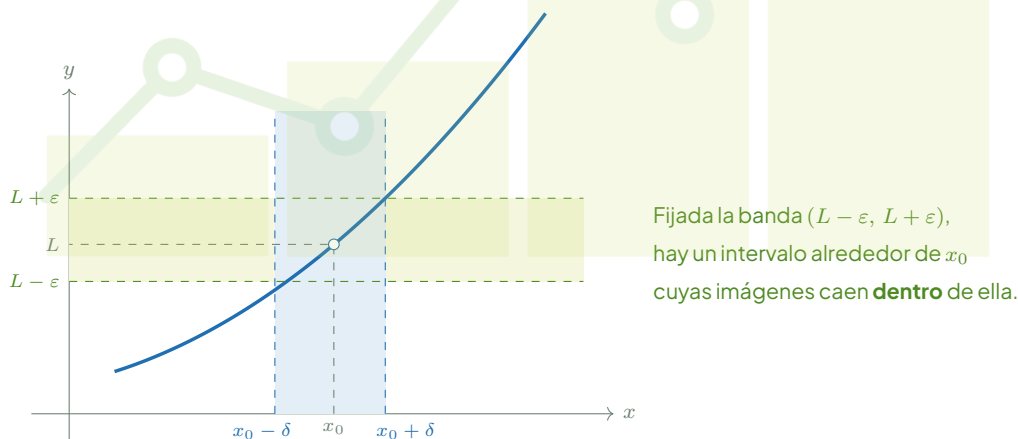
Qué significa

Sea cual sea el número positivo ε , por pequeño que sea, se puede encontrar otro número positivo δ tal que, si la distancia entre x y x_0 es menor que δ , la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε . **La cercanía en la variable implica cercanía en la función.**

$$|f(x) - L| < \varepsilon \iff f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \iff x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ x \neq x_0$$

El valor $f(x_0)$ no interviene: la existencia del límite **no depende** de lo que valga la función en el punto.

Cómo se ve



Cómo se trabaja · demostrar un límite con la definición

Dar valores concretos a ε no demuestra nada: hay que encontrar un δ para **cada** $\varepsilon > 0$.

1. Escribe $|f(x) - L|$ y transfórmalo hasta relacionarlo con $|x - x_0|$: $|f(x) - L| \leq K \cdot |x - x_0|$.
2. Elige δ en función de ε : $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.
3. Comprueba: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq K \cdot |x - x_0| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$.

En la práctica los límites no se calculan así: la definición es el fundamento que garantiza que los métodos de cálculo son correctos.

 Ejemplo resuelto

Usa la definición para demostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$.

 Ejemplo resuelto

El coste total de una empresa, en miles de euros, es $C(x) = x^2$, donde x es el nivel de producción en miles de unidades. Justifica con la definición que $\lim_{x \rightarrow 2} C(x) = 4$.


 EN RESUMEN

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ significa que $f(x)$ está tan cerca de L como se quiera (ε) con tal de tomar x suficientemente cerca de x_0 (δ), sin importar lo que valga f en x_0 . Para demostrarlo se relaciona $|f(x) - L|$ con $|x - x_0|$ y se elige δ en función de ε .

2 Límites laterales

Definiciones y teorema

Definición 1. Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (x_0, a) . Decimos que f tiene **límite** L^+ cuando x se acerca a x_0 **por la derecha** (notándolo $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\varepsilon)) / 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon$$

Obsérvese que $0 < x - x_0 \Rightarrow x > x_0$.

Definición 2. Sea f una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a, x_0) . Decimos que f tiene **límite** L^- cuando x se acerca a x_0 **por la izquierda** (notándolo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^-$):

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^- \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ (\delta = \delta(\varepsilon)) / 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon$$

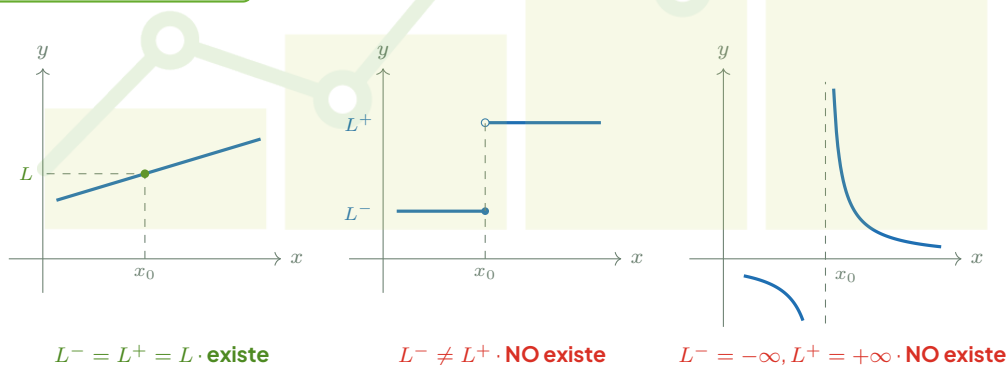
Obsérvese que $0 < x_0 - x \Rightarrow x < x_0$.

Teorema. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$

Observación. La importancia del teorema anterior radica en que, si los límites laterales son distintos, **no existe** un límite de la función.

Cómo se ve · tres casos

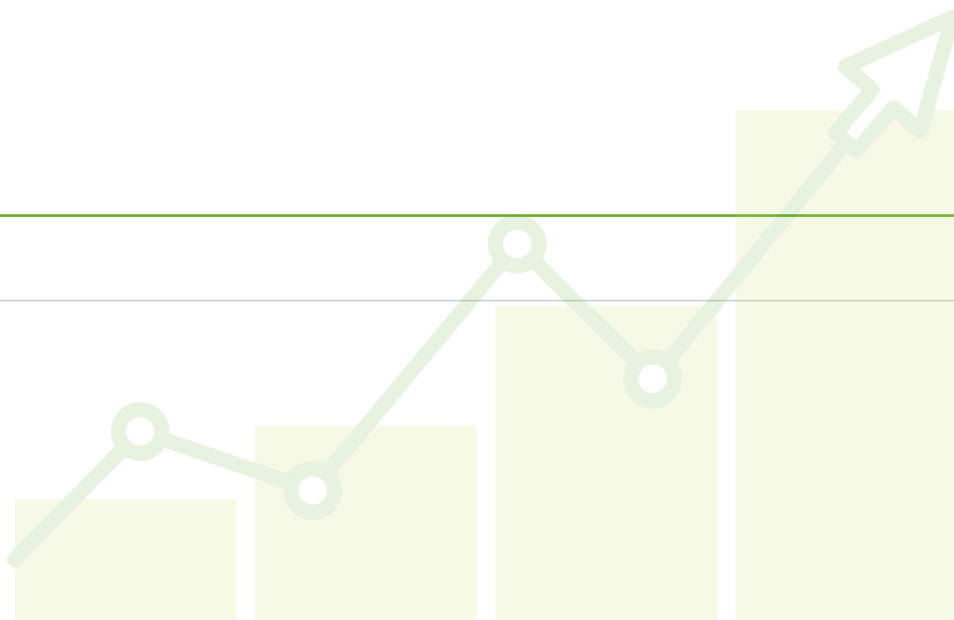


Cómo se trabaja

- Si la función **cambia de expresión** en x_0 (función a trozos, valor absoluto), calcula los dos **límites laterales** por separado.
- Compara:** si coinciden, el límite existe y vale ese valor común; si no coinciden, el límite no existe.

 Ejemplo resuelto

Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$.

 NOTAS

✓ EN RESUMEN

Los límites laterales se calculan cuando la función **cambia de expresión** en el punto. El límite existe si y solo si los dos existen y **coinciden**.

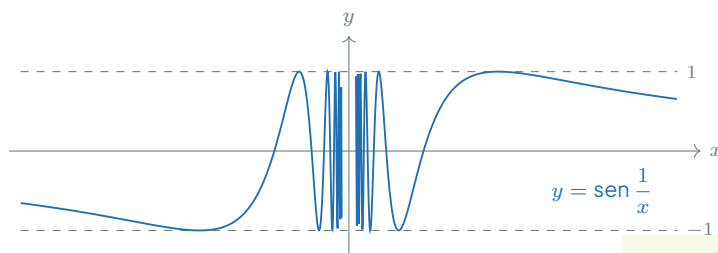
3 Límites que no existen

Qué son · tres causas

Un límite puede no existir por tres motivos:

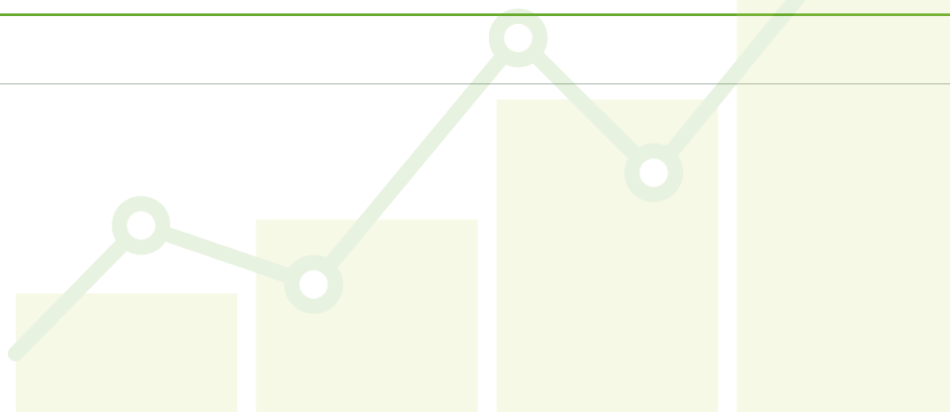
1. **Salto:** $f(x)$ tiende a números diferentes según x tienda a x_0 por la derecha o por la izquierda. Es el caso del ejemplo del apartado 2.
2. **Divergencia:** $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando x tiende a x_0 . Se estudia en el apartado 4.
3. **Oscilación:** $f(x)$ oscila entre dos valores fijos cuando x tiende a x_0 .

El ejemplo típico de oscilación es $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$: cuanto más se acerca x a 0, más deprisa oscila la función entre -1 y 1 , sin aproximarse a ningún número. **El límite no existe.**



Por el mismo motivo no existen $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ ni $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$.

NOTAS



✓ EN RESUMEN

Un límite no existe por **salto** (laterales distintos), por **divergencia** (la función crece o decrece sin cota) o por **oscilación** (no se aproxima a ningún número).

4 Límites infinitos ($x \rightarrow a$)

📌 Límite infinito para x finito

Definición. Sea f definida en (a, b) , salvo tal vez en $x_0 \in (a, b)$. Decimos que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

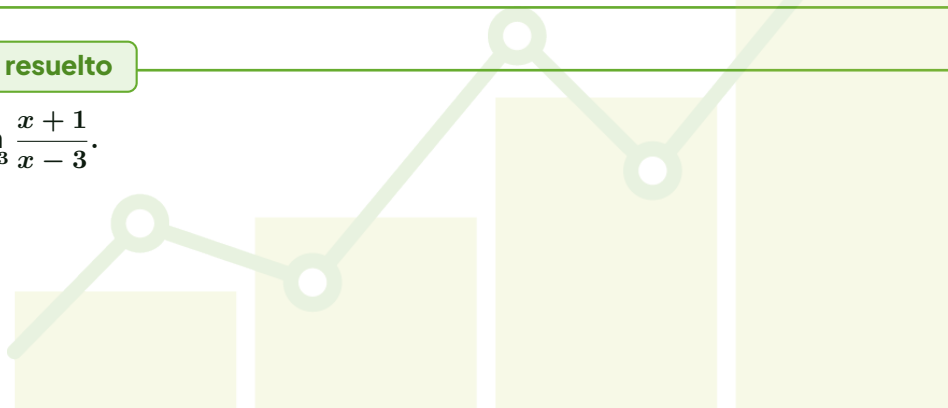
Se dice que la función $f(x)$ tiende a un límite ∞ para $x \rightarrow x_0$ cuando $f(x)$ llega a ser mayor que cualquier número M por grande que sea, con tal de tomar x lo suficientemente próxima a x_0 . La función se aproxima a la recta $x = x_0$ hasta la distancia tan pequeña como se quiera, y esa recta es **asíntota** de la curva (Tema 5).

Un límite infinito **no existe** en el sentido en que se definió el límite en el apartado 1, pero proporciona más información que decir simplemente que no existe. La división por cero no está definida, pero si en un cociente el denominador tiende a cero y el numerador a un número distinto de cero, el cociente tiende a infinito.

- Si la función se conserva positiva: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$
- Si la función se conserva negativa: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 / 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$
- En la notación empleada, ∞ comprende los infinitos más y menos, $+\infty$ y $-\infty$.

📌 Ejemplo resuelto

Calcula $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$.



✓ EN RESUMEN

Si el denominador tiende a 0 y el numerador a un número distinto de 0, el cociente tiende a **infinito**. El signo se decide con los límites laterales. La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical.

5 Límite en el infinito o límite finito para $x \rightarrow \infty$

Límite finito para $x \rightarrow \infty$

Definición. Sea $f(x)$ definida en todo un intervalo (a, ∞) . Se dice que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K > 0 / |x| > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Se dice que la función $f(x)$ tiende hacia el límite finito L para $x \rightarrow \infty$ cuando el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y el límite L llega a ser menor que un número ε , tan pequeño como se quiera, con tal de tomar a x suficientemente grande, es decir, mayor que un cierto número K . La recta $y = L$ a la que se aproxima $f(x)$ se llama **asíntota** (Tema 5).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K > 0 / x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K < 0 / x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límite en el infinito o límite infinito para $x \rightarrow \infty$. Definición:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists K > 0 / |x| > K \Rightarrow |f(x)| > M$$

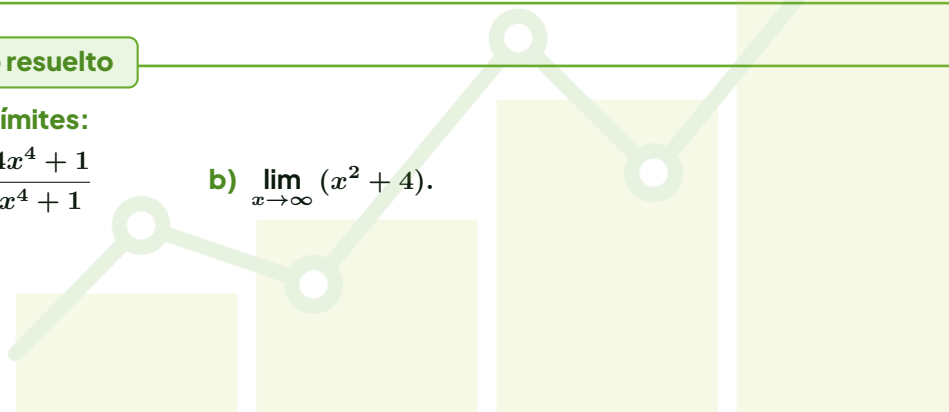
En este caso, los valores de la función crecen sin cota cuando x crece de manera no acotada.

Ejemplo resuelto

Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 1}{x^4 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 4)$.



EN RESUMEN

En el infinito la función puede acercarse a un número L (asíntota horizontal $y = L$) o crecer sin cota. En un cociente de polinomios se divide todo entre la mayor potencia.

6 Infinitésimos e infinitos

Infinitésimos

Llamaremos **infinitésimo** a toda función $f(x)$ que tiende a cero cuando $x \rightarrow x_0$. Es decir, una función es un infinitésimo en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Un infinitésimo no es igual a cero, sino que es una función que **tiende a cero**.

Propiedades de los infinitésimos

1. Si una función $g(x)$ puede escribirse como suma de una constante b y un infinitésimo $f(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$, entonces $g(x) = b + f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Y recíprocamente.
2. La suma algebraica de un número finito de infinitésimos es otro infinitésimo.
3. El producto de una función acotada por un infinitésimo es otro infinitésimo. En particular, el producto de dos infinitésimos es un infinitésimo.
4. El cociente de un infinitésimo por una función que no se anula en el entorno considerado es otro infinitésimo.

Orden de un infinitésimo. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos infinitésimos cuando $x \rightarrow x_0$. Diremos que $f(x)$ es un infinitésimo de orden n respecto de $g(x)$ si: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^n} = L$, con $0 < |L| < \infty$. Si $n = 1$ tienden a cero al mismo ritmo; si $n > 1$, f tiende a cero más rápido; si $0 < n < 1$, más lentamente.

Teorema 1. Cuando dos infinitésimos son equivalentes, el límite no se altera al reemplazar un **factor** $f(x)$ por otro equivalente a él $g(x)$. Cuando $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x \quad \operatorname{tg} x \sim x \quad \arctg x \sim x \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad e^x - 1 \sim x \quad \ln(1+x) \sim x$$

⚠ El teorema habla de **factores**: se sustituye en productos y cocientes, no en sumas ni en restas.

Infinitos

Definición. f es un **infinito** en $x = x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. Todas las propiedades y teoremas vistos para los infinitésimos son válidos cuando x tiende a infinito.

Teorema 2 (relación entre infinitésimos e infinitos). Si $f(x)$ es un infinitésimo cuando $x \rightarrow a$ y no se anula en un entorno del punto, entonces $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$. Recíprocamente, si $f(x) \rightarrow \infty$, entonces $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$.

Comparación de crecimiento. Diremos que una función crece mucho más lentamente que otra, y escribiremos $f(x) \ll g(x)$, si se cumple que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. En este caso, $f(x)$ es despreciable frente a $g(x)$ cuando la variable crece. Cuando $x \rightarrow \infty$ se verifica:

$$\ln x \ll x^\alpha \ll e^x \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

7 Técnicas básicas de cálculo

✚ Límites por sustitución directa

Cuando el límite de una función cuando x tiende a x_0 coincide con el valor de la función en x_0 , se puede calcular el límite por **sustitución directa**. En general, si $x_0 \in D_f$ y la función está definida por una única expresión algebraica, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- **Teorema 1. Límites básicos.** $\lim_{x \rightarrow x_0} k = k$ $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$
- **Teorema 2. Límite de una función radical.** Sea n entero positivo. El siguiente límite es válido para todo x_0 si n es impar, y para todo $x_0 > 0$ si n es par: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(x_0)}$
- **Teorema 3. Propiedades de los límites.** Sean f y g dos funciones definidas en (a, b) salvo tal vez en $x_0 \in (a, b)$ y tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$. Entonces:
 - a) Múltiplo o escalar: $\lim_{x \rightarrow x_0} (b f(x)) = b L_1$
 - b) Suma o diferencia: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$
 - c) Producto: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$
 - d) Cociente: $L_2 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$
 - e) Logaritmo: $L_1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) = \ln L_1$
 - f) Potencia: $L_1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = L_1^{L_2}$
 - g) Regla del encaje: si en cierto intervalo de centro x_0 es $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$
- **Teorema 4. Límite de funciones polinómicas.** Se calcula sustituyendo: $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$.
- **Teorema 5. Límite de funciones racionales.** Sea $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional, y x_0 un número real tal que $q(x_0) \neq 0$. Entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = r(x_0) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$
- **Teorema 6. Límite de una función compuesta.** Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(L)$
- **Teorema 7. Límites de funciones trigonométricas.** $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$, y lo mismo con cotangente, secante y cosecante.

📌 Límites que no se resuelven por sustitución directa

Teorema 8. Sean f y g dos funciones definidas en (a, b) salvo tal vez en $x_0 \in (a, b)$ y tales que:

I) $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$

II) $\exists \delta > 0 / f(x) = g(x) \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$

Entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Es decir: se busca una función $g(x)$ que coincida con $f(x)$ para todo $x \neq x_0$ cerca de x_0 ; si existe el límite de g , existe el de f y son iguales. Es la **manipulación algebraica**: factorización, simplificación, racionalización o división por la mayor potencia de la variable.

📌 Ejemplo resuelto

Calcula el límite utilizando álgebra de límites: $\lim_{x \rightarrow 2} [x^3 + 2 \ln(x^2 - 3)]$.

📌 Ejemplo resuelto

Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

✓ EN RESUMEN

Primero se intenta la **sustitución directa**. Si no funciona, se transforma la función en otra que coincide con ella salvo en el punto (Teorema 8): factorizar y simplificar, o racionalizar.

8 Estudio de resolución de formas indeterminadas específicas

Concepto de indeterminación

Al operar algebraicamente con funciones que tienen límite para un cierto x_0 puede ocurrir que la expresión que obtengamos no nos permita discernir a priori si el límite existe o no. En este caso, se dice que hay una **indeterminación**. Existen siete tipos de indeterminación según x tienda a un cierto x_0 o a infinito:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty - \infty; \quad 1^\infty; \quad \infty^0; \quad 0^0$$

Si se nos presenta una indeterminación, esto no quiere decir que el límite no exista, sino que esta debe «**salvarse**». Salvar una indeterminación significa buscar una expresión equivalente a la dada en un entorno reducido alrededor del punto que permita obtener el límite. Para resolverlas se utilizan las propiedades y reglas del límite, así como el Teorema 8.

Indeterminación $\frac{0}{0}$

El numerador y el denominador se anulan a la vez: hay un factor común oculto que debe hacerse explícito.

- **Cociente de polinomios.** Factorizamos ambos polinomios y simplificamos (**cancelación o simplificación**):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) M(x)}{(x - x_0) N(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{M(x)}{N(x)}$$

- **Cociente con expresiones irracionales.** Se multiplica y divide por el conjugado de las expresiones irracionales (**racionalización**).
- **Límites trigonométricos especiales:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

- **Cociente de polinomios.** Se divide el numerador y el denominador por x elevado al mayor exponente de la expresión dada. **Regla práctica:** sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$ dos polinomios de grado n y m , respectivamente. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = L \quad \text{donde} \quad \begin{cases} L = \infty & \text{si } n > m \\ L = 0 & \text{si } n < m \\ L = \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \end{cases}$$

- **Cociente con expresiones irracionales.** También se divide numerador y denominador por x elevado al mayor exponente, recordando que $\frac{\sqrt[n]{a}}{x^m} = \sqrt[n]{\frac{a}{x^{m \cdot n}}}$.

 Ejemplo resuelto

Calcula $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{2x^3 - 2x^2 - 10x - 6}$.

 NOTAS

Suma de infinitos de distinto signo ($\infty - \infty$)

Para solucionarla, se recomienda simplificar la diferencia multiplicando y dividiendo la expresión por su conjugada.

Indeterminación 1^∞

Se presenta al calcular $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$ (eventualmente x_0 puede ser infinito) con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$: la base tiende a 1 y el exponente a infinito. Dos resultados de suma importancia:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$. Análogamente, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + f(x)\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e$.

💡 En la práctica, si $f(x) \rightarrow 1$ y $g(x) \rightarrow \infty$, todo lo anterior se resume en: $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x) \cdot (f(x)-1)}$.

Teorema cero por acotada

Teorema. Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (es decir, f es un infinitésimo para $x = x_0$) y $|g(x)| \leq k$ con $k \in \mathbb{R}$ (g es una función acotada). Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = 0$$

Sirve cuando un factor no tiene límite, como en $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ y $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$. Por ejemplo:

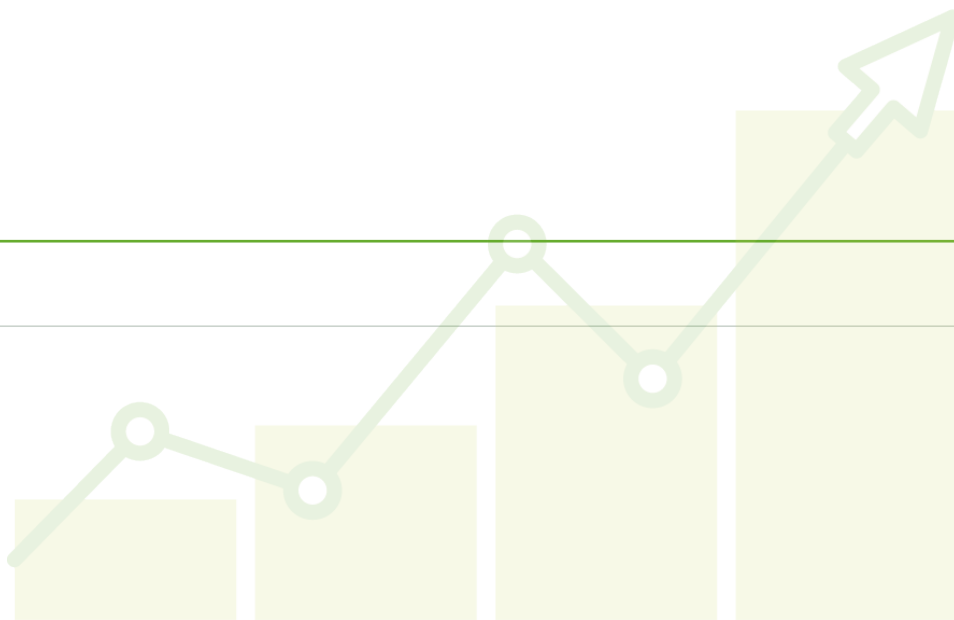
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ejemplo resuelto

Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-6}\right)^{3x-1}$.

 Ejemplo resuelto

Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$.

 NOTAS

 Ejemplo resuelto
Calcula los límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x^4 + 2x^2 - 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^3 - x + 2}{3x^3 + x^2 + 2x - 5}$

 NOTAS
 EN RESUMEN

$\frac{0}{0}$: factorizar, racionalizar o límites trigonométricos. $\frac{\infty}{\infty}$: dividir por la mayor potencia (mandan los grados). $\infty - \infty$: conjugada. 1^∞ : el número e . Y si un factor tiende a 0 y el otro está acotado, el producto tiende a 0.

9 Definición formal de límite en varias variables

♥ Nociones previas

En una variable solo hay dos sentidos para acercarse a un punto; en el plano existen **infinitos caminos**, y para que el límite exista el valor de la función debe ser el mismo independientemente de la trayectoria seguida.

Distancia entre dos puntos del plano. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos del plano. Se define la distancia entre ellos como el número real no negativo $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Entorno de un punto. Dado un punto (x_0, y_0) y un número positivo $r > 0$, se llama entorno de centro (x_0, y_0) y radio r , que se denota por $E_r(x_0, y_0)$, al conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia al punto (x_0, y_0) es menor que r :

$$E_r(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}$$

Es el interior de un círculo de radio r centrado en (x_0, y_0) , sin incluir su frontera.

Entorno reducido de un punto. Se denomina entorno reducido de centro (x_0, y_0) y radio $r > 0$, que se denota por $E_r^*(x_0, y_0)$, al conjunto formado por todos los puntos del entorno $E_r(x_0, y_0)$, excluyendo el propio punto: $E_r^*(x_0, y_0) = E_r(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\}$.

Punto de acumulación. Se dice que el punto (x_0, y_0) es punto de acumulación del dominio de la función f si en todo entorno reducido suyo existe al menos un punto del dominio de la función: $\forall r > 0, E_r^*(x_0, y_0) \cap \text{Dom}(f) \neq \emptyset$.

♥ Definición formal del límite doble

El número $L \in \mathbb{R}$ es el límite de la función $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ si, dado cualquier número positivo ε , existe un número positivo δ tal que, para todo punto (x, y) del dominio de la función perteneciente al entorno reducido $E^*(P_0, \delta)$, la imagen $f(x, y)$ pertenece al entorno $E(L, \varepsilon)$. En símbolos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } (x, y) \in E^*(P_0, \delta) \Rightarrow f(x, y) \in E(L, \varepsilon)$$

Observaciones: el punto P_0 debe ser de acumulación del dominio para poder calcular los valores de la función en puntos tan próximos a (x_0, y_0) como se quiera. La expresión $f(x, y) \in E(L, \varepsilon)$ es equivalente a escribir $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

Formulación equivalente (ε - δ). Sea $f(x, y)$ una función definida en un entorno de un punto (x_0, y_0) , salvo, quizá, en el propio punto. Diremos que el número real L es el límite de f cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ si se cumple que: para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo (x, y) del dominio de f ,

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \text{ entonces } |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

 Ejemplo resuelto

 **Ejercicio de examen** · Febrero 2023, 1.ª semana (plan 2010)

Comprueba, con la definición de límite, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$.

 Propiedades

Valen las mismas propiedades que para funciones de una variable.

- 1) Si existe el $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$, este debe ser único (**unicidad del límite**).
- 2) Si el $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ con $L \neq 0$, entonces en algún entorno reducido del punto $P_0(x_0, y_0)$ la función conserva el mismo signo que L .
- 3) Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L_2$, entonces: a) $\lim (f \pm g) = L_1 \pm L_2$ b) $\lim (f \cdot g) = L_1 \cdot L_2$ c) $\lim \frac{f}{g} = \frac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$
- 4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x,y)| = \left| \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \right|$
- 5) Si el $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$, entonces la función puede expresarse como suma de su límite más un infinitésimo en el punto, o sea $f(x,y) = L + r(x,y)$ con $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} r(x,y) = 0$.

 EN RESUMEN

El límite doble se define como en una variable, con la distancia en el plano. Si existe, es **único**.

10 Generalización o extensión del concepto de límite a varias variables

📌 Límites infinitos y en el infinito

Límite infinito para $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Definición (forma unificada):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta \Rightarrow |f(x,y)| > M$$

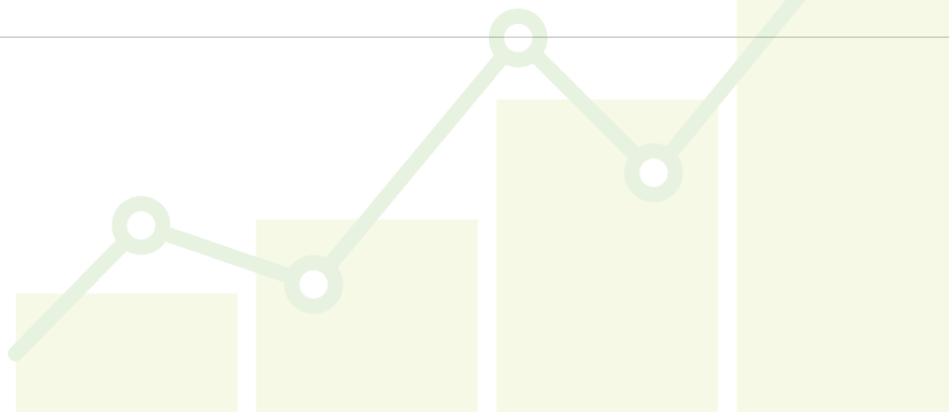
La definición engloba dos comportamientos: **límite** $+\infty$, con $f(x,y) > M$, y **límite** $-\infty$, con $f(x,y) < -M$. La condición $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$ describe un entorno perforado de (x_0, y_0) : puntos arbitrariamente cercanos al punto, pero sin incluirlo.

Límite finito cuando $(x, y) \rightarrow \infty$. Definición (general). Sea una función definida fuera de un conjunto acotado del plano. Diremos que $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x,y) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $K > 0$ tal que, si $x^2 + y^2 > K^2$, entonces $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Límite infinito cuando $(x, y) \rightarrow \infty$. Diremos que $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x,y) = +\infty$ si para todo número $M > 0$ existe $K > 0$ tal que, si $x^2 + y^2 > K^2$, entonces $f(x,y) > M$. Análogamente para $-\infty$, con $f(x,y) < -M$.

Por ejemplo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$ $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$ $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} (x^2 + y^2) = +\infty$

📌 NOTAS



✓ EN RESUMEN

En dos variables, «cerca del punto» y «lejos del origen» se miden con la distancia: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ pequeña, o $x^2 + y^2$ grande. Las definiciones son las de una variable con ese cambio.

11 Límites sucesivos o reiterados

Definición

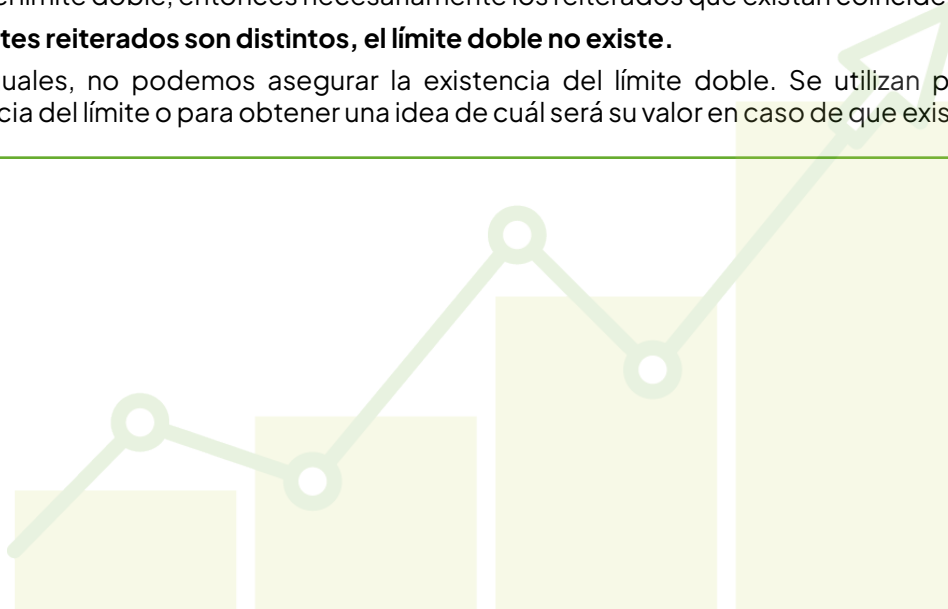
Se denominan **límites reiterados** (también llamados **límites iterados**) a aquellos que se obtienen calculando sucesivamente límites respecto de cada variable, fijando previamente las restantes.

Fijamos primeramente la variable y y hacemos tender x a x_0 . Si este límite existe, dependerá del valor que hayamos fijado de y : será una función $\lambda(y)$. El límite de esa función para y tendiendo a y_0 es un límite reiterado. De la misma forma, fijando x y haciendo que y tienda a y_0 se define una función $\mu(x)$, cuyo límite para x tendiendo a x_0 es el otro límite reiterado:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow y_0} \lambda(y) = L_1 \qquad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \mu(x) = L_2$$

Los límites reiterados estudian la función a lo largo de direcciones paralelas a los ejes coordenados: solo consideran **dos de los infinitos caminos posibles** de aproximación al punto.

- Si existe el límite doble, entonces necesariamente los reiterados que existan coinciden con él.
- **Si los límites reiterados son distintos, el límite doble no existe.**
- Si son iguales, no podemos asegurar la existencia del límite doble. Se utilizan para probar la inexistencia del límite o para obtener una idea de cuál será su valor en caso de que exista.



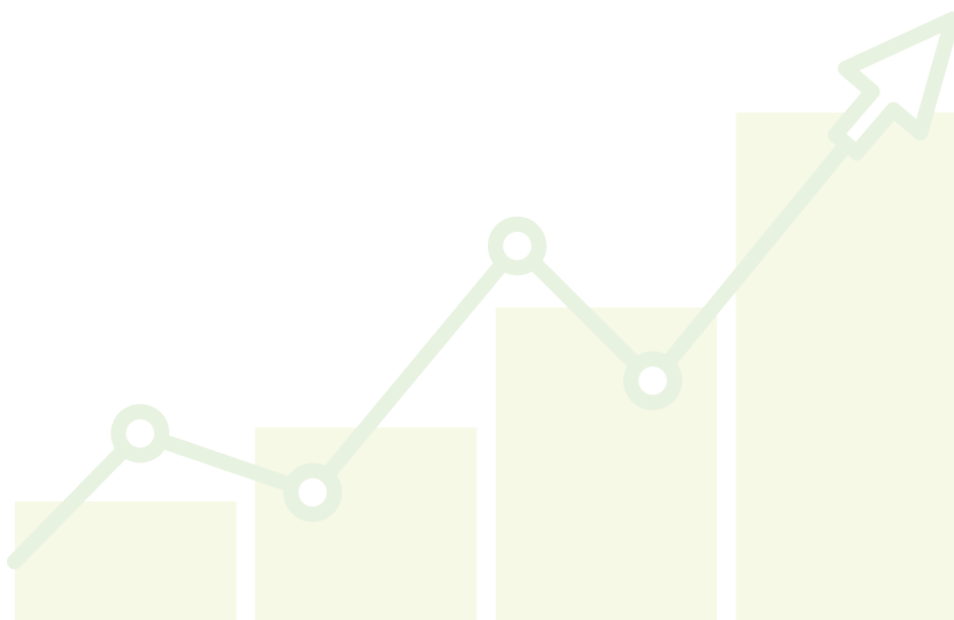
 Ejemplo resuelto

Calcula los límites reiterados en el origen y di qué se puede concluir:

a) $f(x, y) = \frac{x - 8y}{x + 14y}$

b) $f(x, y) = (x + y) \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi}{x + y} \right)$

c) $f(x, y) = x \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{y} \right)$

 **NOTAS** **EN RESUMEN**

Reiterados **distintos**: el límite doble no existe. **Iguales**: no se puede asegurar nada. Y el límite doble puede existir aunque falte uno de los reiterados, o los dos.

12 Dependencia del camino

✦ Límites radiales

Un **límite radial** es el valor al cual tiende una función $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) pero acercándose por una recta que pase por este. Es decir, x e y no varían en forma independiente, sino que están relacionadas por la ecuación de la recta radial que pasa por (x_0, y_0) . Su cálculo se reduce al de un límite simple, de una variable:

$$L_r = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ y-y_0=m(x-x_0)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, m(x-x_0) + y_0)$$

Relaciones entre los distintos límites

- 1) Si existen el límite doble, los límites reiterados y los radiales deben ser iguales entre sí: $L = L_1 = L_2 = L_r$.
- 2) Si existen los límites reiterados y los radiales, se puede dar tres tipos de casos:
 - a) los límites reiterados sean distintos, en cuyo caso no existe el límite doble: $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists L$
 - b) los límites reiterados son iguales, pero existen diferentes límites radiales; en este caso no existe el límite doble: $L_1 = L_2 \neq L_r \Rightarrow \nexists L$
 - c) sean iguales los límites reiterados y coincidan con los radiales; en este caso no se puede concluir sobre la existencia o no del límite doble, habría que calcular límites acercándose al punto considerado por otras curvas.
- 3) Si existe el límite doble, L , puede ocurrir que no exista alguno de los límites reiterados L_1 o L_2 , o ninguno de ellos (L_1 y L_2).

✦ Dependencia del parámetro · condición de unicidad

Con una trayectoria general $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \rightarrow t_0$, el límite pasa a ser de una variable: $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t))$.

El valor obtenido puede depender del parámetro que define la trayectoria: pendiente m (rectas), exponente (parábolas) u otras formas. Si depende de ese parámetro, hay **dependencia del camino**.

Condición de unicidad. El límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ existe si y solo si el valor límite es único e independiente de cualquier trayectoria. Basta encontrar **dos caminos con distinto límite** para concluir que el límite no existe. Si todos los caminos estudiados coinciden, no es suficiente para afirmar existencia.

 Ejemplo resuelto

 **Ejercicio de examen** · Febrero 2025, 2.ª semana (plan 2010)

Investiga si existe el límite doble en el origen de la función $f(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + 3y^2}$ utilizando límites reiterados y radiales.

 NOTAS

 Ejemplo resuelto

Estudia si existe el límite doble en el origen de la función $f(x, y) = \frac{3x^2y}{9x^4 + y^2}$.

 NOTAS

✓ EN RESUMEN

Radiales: por las rectas que pasan por el punto. Si dependen de m , el límite no existe. Que reiterados y radiales coincidan **no demuestra** que exista: hay que probar otras curvas, como $y = kx^2$.

13 Técnicas algebraicas en varias variables

Las técnicas

Se emplean cuando no se ha podido descartar la existencia del límite. No permiten garantizar que exista, pero sí calcularlo cuando hay indicios razonables de que existe.

- **Sustitución directa.** Consiste en sustituir directamente las variables por el punto al que tienden, $(x, y) \rightarrow (a, b)$. Si el resultado es un número real y no aparece ninguna indeterminación, ese es el valor del límite. Este procedimiento debe interpretarse como un **criterio de continuidad**.
- **Factorización.** Se factoriza y se simplifica el factor común.
- **Acotación.** Consiste en encerrar la función entre expresiones más simples cuyo comportamiento es conocido:

$$\text{Si } |f(x, y)| \leq g(x, y) \text{ y además } g(x, y) \rightarrow 0, \text{ entonces } f(x, y) \rightarrow 0$$

Permite acotar la función en todo un entorno del punto, lo que garantiza un comportamiento independiente del camino. Caso particular: el **teorema cero por acotada** (infinitésimo por función acotada).

- **Uso de infinitésimos.** Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\text{sen}(f(x, y))}{f(x, y)} = 1$. Por ejemplo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Precisión conceptual. La única forma de garantizar con total rigor la existencia de un límite y determinar su valor es utilizar la definición formal $(\varepsilon-\delta)$. En la práctica se usan estas técnicas, cuyo fundamento está en dicha definición.

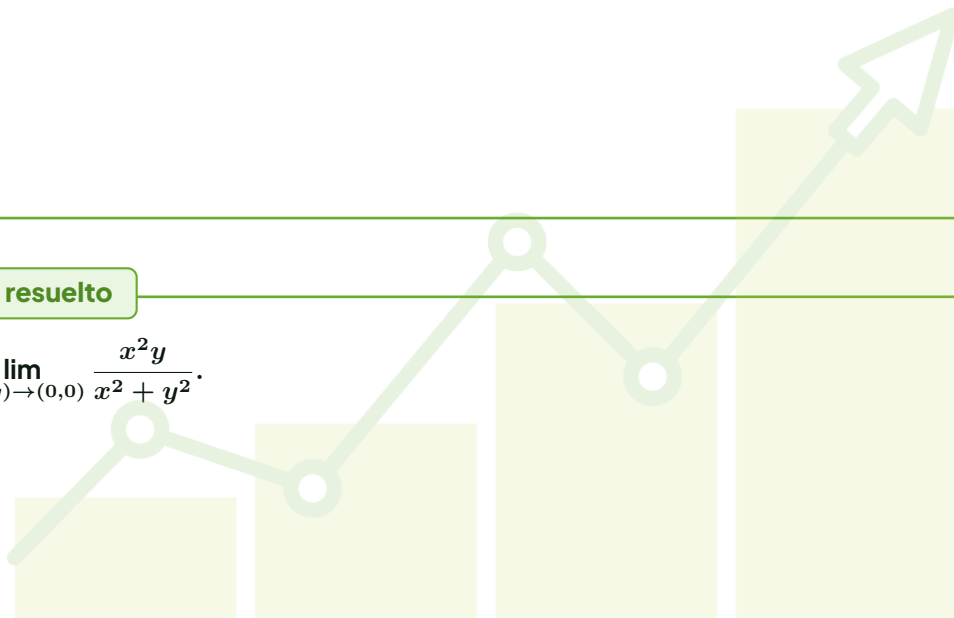
NOTAS

 Ejemplo resuelto

Calcula los límites $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + y^2)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$.

 Ejemplo resuelto

Calcula $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.



 Ejemplo resuelto

Ejercicio de examen · Febrero 2023, 2024 y 2026, 2.ª semana (plan 2010)

Halla, si existen, el límite doble y los límites reiterados en el origen de la función $f(x, y) = (x + y) \cdot \left(\sin \frac{2\pi}{x} + \sin \frac{2\pi}{y} \right)$.



✓ EN RESUMEN

Lo que no te puedes olvidar antes de pasar al Tema 5:

- Primero, intenta **sustituir**. Si la función es continua en el punto y la expresión está definida, el valor obtenido es el límite. Si aparece una indeterminación, hay que transformarla.
- **Indeterminaciones:** $\frac{0}{0}$, factorizar o racionalizar; $\frac{\infty}{\infty}$, los grados; $\infty - \infty$, la conjugada; 1^∞ , el número e .
- **Dos variables:** si $L_1 \neq L_2$, o si L_r depende de m , el límite doble **no existe**. Si todos coinciden, no se puede concluir.
- **Cero por acotada:** infinitésimo por función acotada tiende a 0. Así se suele demostrar que un límite doble **existe**.