



Qué vas a practicar.

Quince ejercicios: **10 de desarrollo** (evaluar una función, dominios, representación gráfica, curvas de nivel y aplicaciones económicas) y **5 tipo test**, rápidos y de concepto. Un **ejercicio por página**.

Índice de ejercicios

Desarrollo · función y dominio

1. Calcula $f(2, -3)$ y $f(1, 1)$.
2. Dominio de $\sqrt[4]{9 - x^2 - y^2} + 1$.
3. Dominio de $\ln(4 - x^2 - y)$.
4. Dominio de $\frac{\sqrt{y+1}}{x^2 - y}$.
5. Dominio de $\frac{\ln(2 + x - y)}{y^2 - 1}$.

Desarrollo · gráfica y curvas de nivel

6. Cortes y trazas del plano $3x + 6y + 4z = 24$.
7. Curvas de nivel de $z = x^2 + y^2$.

Desarrollo · aplicaciones económicas

8. Isocuantas de $z = 2x^2 + 4y^2$.
9. Función de producción $z = 8xy$.
10. Isocostes de $C = 3x_1 + 2x_2$.

Tipo test

11. Dominio con una raíz en el denominador.
12. Curvas de nivel de $e^{x^2+y^2}$.
13. Cómo se obtienen las trazas.
14. Curvas de nivel de la producción.
15. Dominio de $\ln(x - y)$.

FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Ejercicio 1

Dada la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy},$$

halla $f(2, -3)$ y $f(1, 1)$.**✓ Solución**

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$\textcircled{1} \quad f(2, -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = \frac{4 + 9}{-12} = \frac{13}{-12} = -\frac{13}{12}$$

$$\textcircled{2} \quad f(1, 1) = \frac{1^2 + 1^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

 $\textcircled{3}$ Comprobar (dominio)

$$\begin{aligned} 2xy &\neq 0 \\ 2xy &= 0 \begin{cases} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{dom } f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$$

NOTASEvaluar = Sustituir x, y

$$\underbrace{(-3)^2 = 9} \quad \underbrace{-3^2 = -9}$$

Dominio $\Rightarrow \text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$ No tiene sentido $f(3, 0) \nexists$

DOMINIO

Ejercicio 2

Determina y representa gráficamente el dominio de la función

$$f(x, y) = \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2} + 1.$$

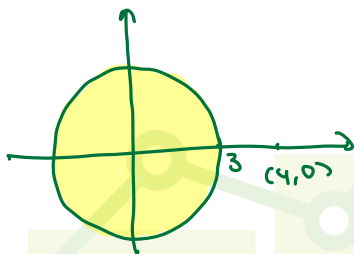
✓ Solución

$$f(x, y) = \sqrt[4]{9 - x^2 - y^2} + 1$$

① Ind par $\Rightarrow 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x^2 + y^2 ; x^2 + y^2 \leq 9$

② Domf = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$

③ Representación: $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow$ Circunf. $(0, 0)$ $r = 3$
 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Rightarrow$ Circunf. (a, b) r



$(0, 0) \Rightarrow 0^2 + 0^2 \leq 9 \underline{\text{Si}}$
 $(4, 0) \Rightarrow 4^2 + 0^2 \leq 9 \underline{\text{No}}$

 NOTAS

Raíz índice par $\Rightarrow$ Radicando ≥ 0

$\leq, \geq \rightarrow$ línea continua (Círculo con borde)

$<, >, \neq \rightarrow$ línea discontinua (Círculo sin borde)

DOMINIO

Ejercicio 3

Determina el dominio de la función

$$f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y).$$

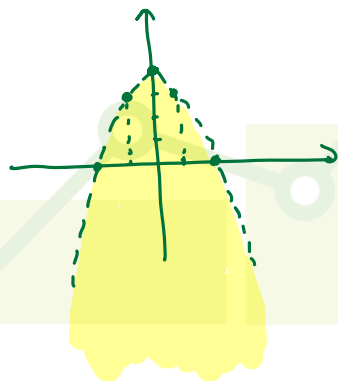
✓ Solución

$$f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y)$$

$$\textcircled{1} \quad 4 - x^2 - y > 0$$

$$\textcircled{2} \quad 4 - x^2 > y \leadsto y < 4 - x^2$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Parábola } a < 0 \quad \cap \quad \text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 4 - x^2\}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Representación}$$


$$y = 4 - x^2 \quad x_v = \frac{-b}{2a} = 0$$

x	y
0	4 → vértice
1	3
-1	4 - (-1) ² = 3
2	0
-2	4 - (-2) ² = 0

$a < 0$ ↗ máximo

$$\textcircled{5} \quad (0, 0) \\ \downarrow \\ 4 - 0^2 - 0^2 > 0 \quad \underline{\text{Si}}$$

NOTAS

$$\ln A(x, y) \Rightarrow A(x, y) > 0 \quad \} \Rightarrow \text{borde NO incluido.}$$

$$\ln 0 \nexists$$

$$\begin{aligned} y < g(x) &\rightarrow \text{región por debajo de la curva} \\ y > g(x) &\rightarrow \text{región por encima de la curva} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} y < g(x) \\ y > g(x) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{otra manera} \\ \downarrow \\ (a, b) \rightarrow \text{sust.} \end{array}$$

DOMINIO

Ejercicio 4

Determina el dominio de la función

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y+1}}{x^2 - y}.$$

✓ Solución

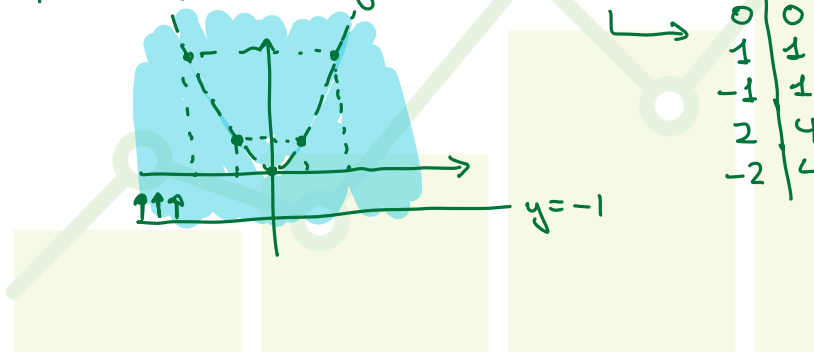
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{y+1}}{x^2 - y}$$

① Raíz índice par $\Rightarrow y+1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -1$

② Denominador $\Rightarrow x^2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq x^2$

③ Intersección:

$$Df = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -1, y \neq x^2\}$$



NOTAS

$\left. \begin{array}{l} \text{raíz índice par} \Rightarrow \text{radic} \geq 0 \\ \text{fracción} \Rightarrow \text{denom} \neq 0 \\ \text{logaritmo} \Rightarrow \text{argumento} > 0 \end{array} \right\} \text{varias condiciones} \Rightarrow \text{INTERSECCIÓN.}$

$y \geq -1 \Rightarrow \text{semiplano (borde incluido)}$
 $y \neq x^2 \Rightarrow \text{Quitamos la curva.}$

DOMINIO

Ejercicio 5

Determina el dominio de la función

$$f(x, y) = \frac{\ln(2 + x - y)}{y^2 - 1}.$$

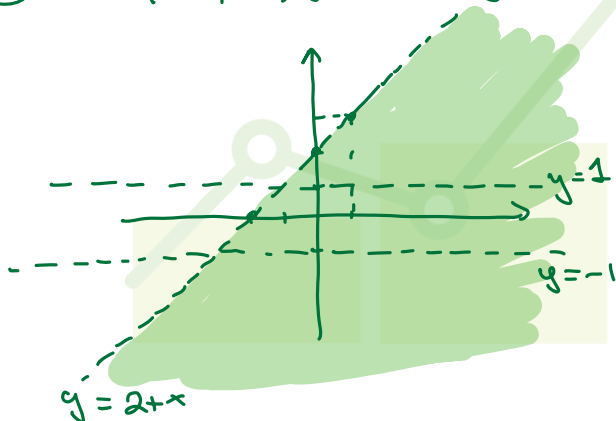
Solución

$$f(x,y) = \frac{\ln(2+x-y)}{y^2-1}$$

① Logaritmo : $2 + x - y > 0 \Rightarrow 2 + x > y \Rightarrow y < 2 + x$

② Denominator: $y^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1$
 $y = \pm 1$

(3) $\text{Dom } f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2+x; y \neq 1, y \neq -1\}$



$y = 2 + x$

x	y
0	2
-2	0
1	3

$$(0,0) \Rightarrow 0 < 2+0 \text{ SI}$$

 NOTAS

$\ln A(x,y) \Rightarrow A(x,y) > 0$ (Borde No invadido) $\rightarrow$ líneas descnt
 $\text{Fracción} \Rightarrow \underbrace{\text{denom} \neq 0}_{\text{líneas descnt}}$

$\left. \begin{array}{l} \ln A(x,y) \Rightarrow A(x,y) > 0 \text{ (Borde No invadido)} \rightarrow \text{líneas descnt} \\ \text{Fracción} \Rightarrow \underbrace{\text{denom} \neq 0}_{\text{líneas descnt}} \end{array} \right\} \text{Intersección}$

Raíz ind par $\Rightarrow$ radicando ≥ 0 (líneas cont)

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Ejercicio 6

Dada la función $3x + 6y + 4z = 24$, halla las intersecciones con los ejes y con los planos coordenados y represéntala gráficamente.

✓ Solución

$$3x + 6y + 4z = 24$$

① Cortes con los ejes:

Eje X $\Rightarrow y = z = 0$
 $3x = 24 \Rightarrow x = 8$ (8,0,0) A

Eje Y $\Rightarrow x = z = 0$
 $6y = 24 \Rightarrow y = 4$ (0,4,0) B

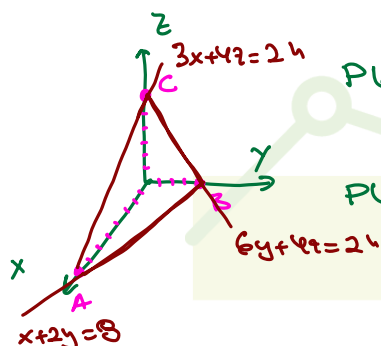
Eje Z
 $x = y = 0$ $4z = 24 \Rightarrow z = 6$ (0,0,6) C

② Trazas $\Rightarrow$ Plano XY $\Rightarrow z = 0 \Rightarrow 3x + 6y = 24$

$x + 2y = 8$ recta $\begin{cases} (0,4) \\ (8,0) \end{cases}$

Plano XZ $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 3x + 4z = 24$ recta $\begin{cases} (0,6) \\ (8,0) \end{cases}$

Plano YZ $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow 6y + 4z = 24$ recta $\begin{cases} (0,6) \\ (4,0) \end{cases}$



Forma explícita: $z = \frac{24 - 6y - 3x}{4} = 6 - \frac{3}{2}y - \frac{3}{4}x$

NOTAS

Cortes ejes $\Rightarrow$ anulas dos variable

Trazas $\Rightarrow$ anula una variable.

Plano XY $\Rightarrow z = 0$

Plano XZ $\Rightarrow y = 0$

Plano YZ $\Rightarrow x = 0$

Eje X $\Rightarrow y = z = 0$
 Eje Y $\Rightarrow x = z = 0$
 Eje Z $\Rightarrow x = y = 0$

Explícita: $z = f(x, y)$

CURVAS DE NIVEL

Ejercicio 7

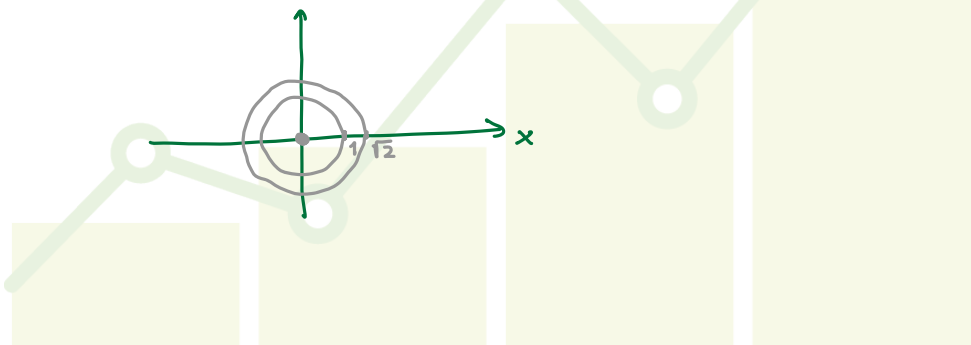
Representa gráficamente las curvas de nivel para $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ y $z = 2$ de la superficie

$$z = x^2 + y^2.$$

✓ Solución

$$z = x^2 + y^2$$

- ① $K = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = -1 \nexists \Rightarrow$ no existe la curva de nivel
 ② $K = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (0,0) \rightarrow$ solo un punto.
 ③ $K = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow$ Circunf. $(0,0)$ $r = 1$
 ④ $K = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow$ Circunf. $(0,0)$ $r = \sqrt{2}$



NOTAS

Paraboloides $z = x^2 + y^2$

$$z = x^2 + y^2 \geq 0 \rightarrow \text{mínimo en el origen, } z = 0$$

Curvas de nivel $z = - \Rightarrow \nexists$ curva.



APLICACIONES ECONÓMICAS

Ejercicio 8

La producción de un bien está dada por $z = 2x^2 + 4y^2$, donde x e y son las cantidades de los factores de producción X e Y . Representa las isocuantas para $z = 2$, $z = 4$ y $z = 8$.

✓ Solución

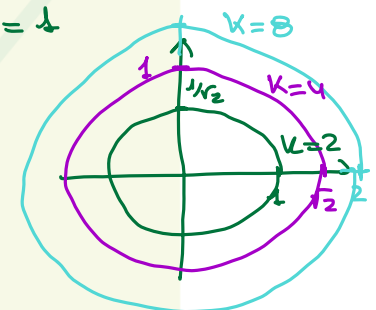
$$z = 2x^2 + 4y^2$$

$$f(x, y) = K \rightarrow \text{Curvas de nivel } z = K$$

① $K=2$ $2x^2 + 4y^2 = 2$
 $x^2 + ②y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ① \Rightarrow \text{elipses } a, b$
 $\boxed{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1/2} = 1} \Rightarrow \text{Elipse } a=1 \quad b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$

② $K=4$ $2x^2 + 4y^2 = 4$
 $\boxed{\frac{x^2}{2} + y^2 = 1} \Rightarrow \text{Elipse } a = \sqrt{2} \approx 1,41 \quad b=1$

③ $K=8$ $2x^2 + 4y^2 = 8$
 $\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1} \Rightarrow \text{Elipse } a=2 \quad b = \sqrt{2}$



NOTAS

Isocuantas $\Rightarrow$ Curvas de nivel de la producción.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{elipse}$$


z mayor $\Rightarrow$ elipse más lejos del origen.

+ producción $\Rightarrow$ la elipse más lejos del origen.

curvas son decrecientes y convexas al origen.

APLICACIONES ECONÓMICAS

Ejercicio 9

Dada la función de producción $z = 8xy$, donde x es el número de horas-máquina usadas e y es el número de horas de trabajo de los empleados:

- Determina las curvas de producción constante para $z = 16$, $z = 24$ y $z = 32$ y represéntalas.
- Si se desea obtener un volumen de producción de 400 unidades y las máquinas funcionan durante 2 horas, ¿cuántas horas deben trabajar los empleados?
- Si se deben producir 8000 unidades con 200 horas de trabajo de los empleados, ¿cuántas horas-máquina se deben utilizar?

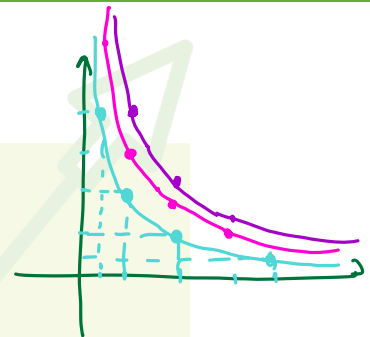
✓ Solución

$$z = 8xy$$

$$a) \ z = 16 \Rightarrow 16 = 8xy \Rightarrow 2 = xy \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

$$z = 24 \Rightarrow 24 = 8xy \Rightarrow 3 = xy \Rightarrow y = \frac{3}{x}$$

$$z = 32 \Rightarrow 32 = 8xy \Rightarrow 4 = xy \Rightarrow y = \frac{4}{x}$$



$$b) \ V = 400 \quad 2 \text{ h.}$$

$$8xy = z \Rightarrow 400 = 8 \cdot 2 \cdot y \Rightarrow y = \frac{400}{16} = 25 \text{ horas.}$$

$$c) \ 8000 \text{ und} = z \quad 200 = y \quad x = ?$$

$$z = 8xy \Rightarrow 8000 = 8x \cdot 200 \Rightarrow x = \frac{8000}{8 \cdot 200} = 5 \text{ horas-máq.}$$

APLICACIONES ECONÓMICAS

Ejercicio 10

Halla las curvas de nivel de la función de costes

$$C(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

e interprétalas. Represéntalas para $C = 6$ y $C = 12$.

✓ Solución

$$C(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

① Curvas nivel $C = k$

$$3x_1 + 2x_2 = k \Rightarrow x_2 = \frac{k - 3x_1}{2} = \frac{k}{2} - \frac{3}{2}x_1$$

Una recta de pendiente
 $-\frac{3}{2}$ (decrece).

pendiente recta.

② $C = 6$

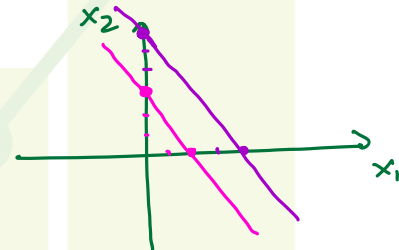
$$3x_1 + 2x_2 = 6 \Rightarrow$$

x_1	x_2
0	3
2	0

③ $C = 12$

$$3x_1 + 2x_2 = 12 \Rightarrow$$

x_1	x_2
0	6
4	0

Son ISOCOSTES: Combinaciones (x_1, x_2) que cuestan lo mismo.Precios: 3 por unidad de x_1 2 por unidad de x_2

NOTAS

ISOCOSTE = Curva de nivel del COSTE
 (misma coste total)

$$C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 \rightarrow \text{recta pendiente } -\frac{P_1}{P_2}$$

Isocoste paralelos · no se cortan

 C mayor $\rightarrow$ mas lejos del origen.

Ejercicio 11**El dominio de la función**

$$f(x, y) = \frac{2x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

es...

- (a) todos los puntos (x, y) .
- (b) todos los puntos (x, y) salvo aquellos en los que $x = y$.
- (c) todos los puntos (x, y) salvo el $(0, 0)$.
- (d) todos los puntos (x, y) salvo aquellos en los que $x = 0$ o bien $y = 0$.

✓ Solución

$$f(x, y) = \frac{2x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Raíz denom} \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$$

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ solo } (0, 0)$$

$$x^2 + y^2 > 0 \text{ SIEMPRE}$$

$$\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

NOTAS

$$z = \sqrt{A(x, y)} \Rightarrow A(x, y) \geq 0$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{A(x, y)}} \Rightarrow A(x, y) > 0$$

$$x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$x^2 + y^2 > 0$$

$$\Downarrow$$

Toda excepto $(0, 0)$
 $\Rightarrow 0^2 + 0^2 = 0 \geq 0 \quad \text{no} \quad \text{!!}$

TIPO TEST · CURVAS DE NIVEL

Ejercicio 12

Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ son...

- (a) una familia de rectas paralelas.
- (b) una familia de circunferencias concéntricas.
- (c) una familia de parábolas.
- (d) una familia de hipérbolas.

✓ Solución

$$e^{x^2+y^2} = k \Rightarrow x^2+y^2 = \ln k \quad (k > 1)$$

circunf. centro origen $r = \sqrt{\ln k}$

NOTAS

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow \text{circunf. } (a,b) \text{ radio } r.$$

$$x^2+y^2 = \ln k$$

$$k > 1 \Rightarrow \text{circunf. } r = \sqrt{\ln k}$$

$$k = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 0 \rightarrow (0,0) \text{ solo.}$$

$$k < 1 \Rightarrow x^2+y^2 = \ln(-) \quad \text{A}$$

TIPO TEST · REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Ejercicio 13**Las trazas de una superficie se obtienen...**

- (a) igualando a cero dos de las variables.
- (b) igualando a cero una de las variables.**
- (c) fijando un valor constante $z = k$.
- (d) despejando z .

✓ Solución

Trazas $\Rightarrow$ Plano $XY \Rightarrow z=0$
Plano $XZ \Rightarrow y=0$
Plano $ZY \Rightarrow x=0$

 NOTAS

Trazas $\Rightarrow$ intersecciones con los planos coordenados.
 $\Downarrow$
Anulamos una de las variables. (curvas)
Ejes $\Rightarrow$ anulamos dos variables (puntos)

Ejercicio 14

Las curvas de nivel de una función de producción se llaman...

- (a) isocostes.
- (b) isocuantas.
- (c) curvas de indiferencia.
- (d) isoingresos.

✓ Solución

Producción → Isocuantas

NOTAS

Producción → Isocuantas
 Coste → Isocoste
 Utilidad → curva de indiferencia
 Ingreso → Isoingreso
 Prod. conjunta → curva de transformación.

Ejercicio 15

El dominio de la función $f(x, y) = \ln(x - y)$ está formado por los puntos (x, y) que cumplen...

- (a) $y < x$.
- (b) $y \leq x$.
- (c) $y \neq x$.
- (d) cualquier condición: es todo el plano.

✓ Solución

$$f(x, y) = \ln(x - y) \quad x - y > 0 \Rightarrow x > y \Rightarrow y < x$$

NOTAS

$$\ln A(x, y) \rightarrow A(x, y) > 0 \text{ (ESTRICTO)}$$

