



Qué vas a practicar.

Cincuenta y seis ejercicios en cuatro bloques: **11 de desarrollo** y **7 tipo test** de una variable, y **30 de desarrollo** y **8 tipo test** de **límites dobles** (sustitución, caminos, reiterados, radiales, cero por acotada, definición y límites infinitos). Dentro de cada bloque van **en el orden de los apuntes**, y cada uno indica su **apartado**.

Índice de ejercicios

Desarrollo · una variable

1. Función a trozos · salto.
2. Límite lateral de una función a trozos.
3. $\frac{\sin^2 x}{x|x|}$ · laterales.
4. $(\frac{1}{2})^{1/x}$ · lateral con exponencial.
5. Sustitución directa con exponencial.
6. $\frac{0}{0}$ con raíces.
7. $\frac{0}{0}$ factorizando.
8. $\frac{0}{0}$ con senos.
9. $\frac{1-\cos x}{x}$.
10. $\frac{\infty}{\infty}$ con grados distintos.
11. Indeterminación 1^∞ .

Tipo test · una variable

12. Función a trozos en $x = 1$.
13. Límite de $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.
14. Límite de $\frac{\sin 2x + \sin x}{\sin 3x}$.
15. Límite de un cociente de polinomios en $x = 3$.
16. $\frac{\infty}{\infty}$ con una raíz.
17. Límite de $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x}$.
18. Indeterminación 1^∞ .

Desarrollo · límites dobles

19. $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ · definición con acotación.
20. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ · definición con acotación.
21. Ingresos $R(x, y) = x + y$ en $(1, 1)$ · definición.
22. $\sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ · no existe por oscilación.
23. $\frac{1}{x^2 + y^2}$ en el origen · límite infinito.
24. $\frac{1}{x^2 + y^2}$ en el infinito.
25. $x^2 + y^2$ y $-(x^2 + y^2)$ en el infinito.
26. $\frac{1}{\sin(x^2 + y^2)}$ · infinitésimo equivalente.
27. $\frac{7x-y}{3x+y}$ · reiterados.
28. $e^{\frac{3x-2y}{x+y}}$ · reiterados.
29. $\frac{x-8y}{x+14y}$ · reiterados.
30. $\frac{y^2-2x^2}{y^2+2x^2}$ · reiterados.
31. $(x+y) \sin \frac{2\pi}{x+y}$ · reiterados y acotada.
32. $\frac{5xy}{3x^2+y^2}$ · reiterados y radiales.
33. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ · caminos distintos.
34. $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ · caminos distintos.
35. $\frac{3x^2 y}{9x^4+y^2}$ · radiales y parábolas.
36. $\frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ a trozos · el valor en el punto.
37. $\frac{3x^2 y}{x^4+y^2}$ a trozos · parábolas.

38. $\frac{3x-2y}{x^2+y^2}$ en $(-1, 2)$ · sustitución.
39. xy · producto de infinitésimos.
40. $\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ · infinitésimos equivalentes.
41. $\frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ · reescribir y acotar.
42. $(2x+3y) \sin \frac{2\pi}{x+y}$ · cero por acotada.
43. $3x \sin \frac{1}{2y}$ · límite doble y reiterados.
44. $x \cos \frac{1}{y}$ · cero por acotada.
45. $x \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ · cero por acotada.
46. $(x^2+y^2) \cos \frac{1}{x^2+y^2}$ · cero por acotada.
47. $y^2 \sin \frac{2\pi}{x}$ a trozos · acotada y reiterados.
48. $x \sin \frac{1}{y}$ · cero por acotada.

Tipo test · dos variables

49. Reiterados de $\frac{xy-x+y}{x+y}$.
50. Reiterados de $e^{\frac{x-2y}{x+2y}}$.
51. Límite de $\frac{x^2+3y^2+6xy+xy^2}{x^2+y^2}$.
52. Límite de $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ en $(0, 0)$.
53. Direccionales de $\frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.
54. Límite de $\frac{x}{\sqrt{2x+y}}$ en $(1, 2)$.
55. Límite de $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ en $(1, 1)$.
56. Límite de $\frac{y \sin(x-1)}{x^2-1}$ en $(1, 1)$.

APARTADO 2 · LÍMITES LATERALES · SALTO

Ejercicio 1

Estudia si existe el límite en $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

✓ Solución

APARTADO 2 · LÍMITES LATERALES

Ejercicio 2

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq -7 \\ -x^2 + 3 & \text{si } x > -7 \end{cases}$$

✓ Solución

Paso 1 · es un límite lateral **por la derecha**: $x \rightarrow -7^+$ significa que x se acerca a -7 con valores mayores que -7 .

Paso 2 · para $x > -7$ la función es $f(x) = -x^2 + 3$. Sustituyo:

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^+} (-x^2 + 3) = -(-7)^2 + 3 = -49 + 3 \Rightarrow -46$$

Por la izquierda se usaría la otra expresión: $2 \cdot (-7) - 3 = -17$. Como los laterales son distintos, el límite de f en $x = -7$ no existe; pero aquí solo se pide el lateral por la derecha.

APARTADO 2 · LÍMITES LATERALES

Ejercicio 3

Calcula los límites laterales en $x = 0$ de la función:

$$y = \frac{\text{sen}^2 x}{x \cdot |x|}$$

✓ Solución NOTAS

APARTADO 4 · LÍMITES INFINITOS · LATERAL CON EXPONENCIAL

Ejercicio 4

Calcula el siguiente límite lateral:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

✓ Solución

APARTADO 7 · TÉCNICAS BÁSICAS DE CÁLCULO · SUSTITUCIÓN DIRECTA

Ejercicio 5

Calcula el siguiente límite utilizando el álgebra de límites:

$$\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}$$

✓ Solución

APARTADO 8 · FORMAS INDETERMINADAS · 0/0 CON RAÍCES

Ejercicio 6

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}.$$

✓ Solución

APARTADO 8 · FORMAS INDETERMINADAS · 0/0 FACTORIZANDO

Ejercicio 7

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

✓ Solución NOTAS

APARTADO 8 · FORMAS INDETERMINADAS · 0/0 CON SENOS

Ejercicio 8

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{\operatorname{sen} x}.$$

✓ Solución

APARTADO 8 · FORMAS INDETERMINADAS · 0/0 CON COSENO

Ejercicio 9

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

✓ Solución

APARTADO 8 · FORMAS INDETERMINADAS · ∞/∞ **Ejercicio 10**

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4}{x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x^4 + 2x^2 - 5}$

 SoluciónAPARTADO 8 · FORMAS INDETERMINADAS · 1^∞ **Ejercicio 11**

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{x+2}.$$

 Solución

TIPO TEST · APARTADO 2 · LÍMITES LATERALES

Ejercicio 12

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Su límite cuando $x \rightarrow 1$ es:

- (a) 3. (b) 6.
(c) 0. (d) No existe.

✓ Solución

TIPO TEST · APARTADO 8 · FORMAS INDETERMINADAS · 0/0

Ejercicio 13

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

- (a) $\frac{1}{2}$. (b) -2.
(c) 1. (d) $\frac{1}{3}$.

✓ Solución

 NOTAS

Ejercicio 14

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x}$$

- (a) 0. (b) 1.
(c) 2. (d) 3.

☒ Solución**Ejercicio 15**

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 4x + 3}$$

- (a) 0. (b) 1.
(c) 3. (d) No existe.

☒ Solución NOTAS

Ejercicio 16

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}}{2x + 1}$$

- (a) Infinito. (b) 0.
(c) 5. (d) 3.

✓ Solución**Ejercicio 17**

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x})$$

- (a) Infinito. (b) 0.
(c) -1. (d) No existe.

✓ Solución

Ejercicio 18

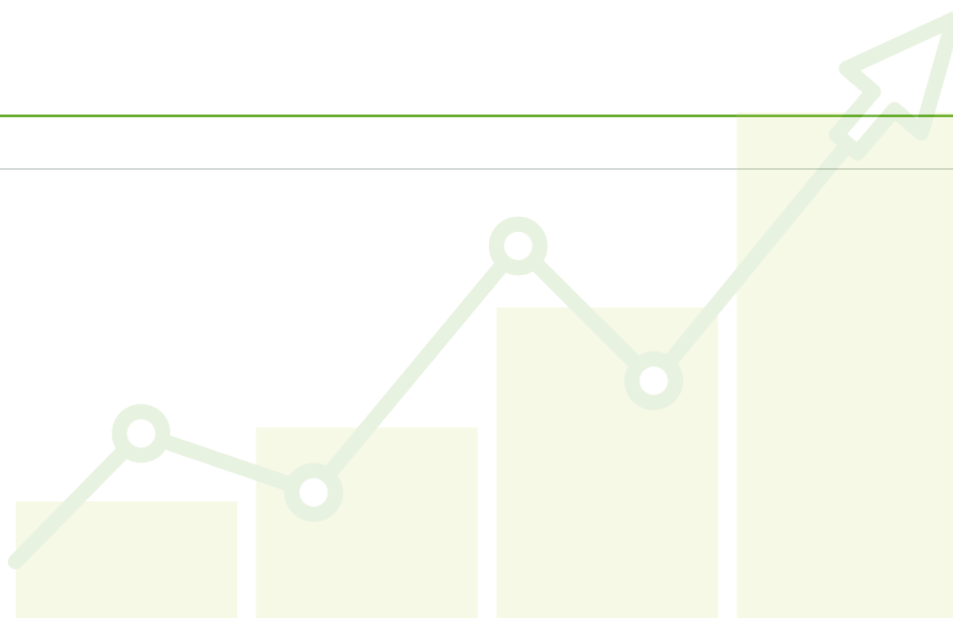
Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 1} \right)^{2x}$$

(a) 1.

(b) $e^{-4/3}$.(c) $e^{2/3}$.

(d) 0.

✓ Solución NOTAS

Ejercicio 19

Comprueba, con la definición de límite, que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

✓ Solución**Ejercicio 20**

Prueba, con la definición de límite, que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

✓ Solución

Paso 1 · hay que probar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \varepsilon$.

Paso 2 · busco una cota. Como $x^2 \leq x^2 + y^2$:

$$|f(x, y)| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Paso 3 · si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces $|f(x, y)| < \delta$. Basta tomar:

$$\delta = \varepsilon$$

Con ese δ se cumple la definición, luego el límite vale 0.

Ejercicio 21

Los ingresos de una empresa por la venta de dos productos son $R(x, y) = x + y$. Comprueba, con la definición de límite, que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} R(x, y) = 2$$

✓ Solución NOTAS

Ejercicio 22

Estudia si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

✓ Solución NOTAS

APARTADO 10 · LÍMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO

Ejercicio 23

Estudia el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

✓ Solución

APARTADO 10 · LÍMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO

Ejercicio 24Estudia el siguiente límite, en el que el punto (x, y) se aleja indefinidamente del origen:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

✓ Solución

Paso 1 · que $(x, y) \rightarrow \infty$ significa que la distancia al origen, $\sqrt{x^2 + y^2}$, crece sin cota. Entonces el denominador tiende a $+\infty$ y el cociente tiende a 0.

Paso 2 · lo compruebo con la definición: dado $\varepsilon > 0$, quiero que $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ lejos del origen.

$$\frac{1}{x^2 + y^2} < \varepsilon \iff x^2 + y^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff \sqrt{x^2 + y^2} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Basta tomar $K = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$: a distancia mayor que K se cumple.

Paso 3 · resultado:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

APARTADO 10 · LÍMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO

Ejercicio 25

Estudia los siguientes límites, en los que el punto (x, y) se aleja indefinidamente del origen:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} (x^2 + y^2)$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} -(x^2 + y^2)$

✓ Solución

Paso 1 · a) $x^2 + y^2$ es el cuadrado de la distancia al origen: si la distancia crece sin cota, la función también. Con la definición: dado $M > 0$,

$$x^2 + y^2 > M \iff \sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{M}$$

Basta tomar $K = \sqrt{M}$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} (x^2 + y^2) = +\infty$$

Paso 2 · b) es la misma función cambiada de signo: decrece sin cota. Dado $M > 0$, se cumple $-(x^2 + y^2) < -M$ cuando $\sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{M}$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} -(x^2 + y^2) = -\infty$$

Paso 3 · en los dos casos la función **diverge**: el signo indica hacia dónde.

APARTADO 10 · LÍMITES INFINITOS Y EN EL INFINITO · INFINITÉSIMO EQUIVALENTE

Ejercicio 26

Estudia el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\text{sen}(x^2 + y^2)}$$

✓ Solución

APARTADO 11 · LÍMITES SUCESIVOS O REITERADOS

Ejercicio 27

Calcula, si existe, el límite doble:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{7x - y}{3x + y}.$$

✓ Solución

APARTADO 11 · LÍMITES SUCESIVOS O REITERADOS

Ejercicio 28

Calcula los límites reiterados de la función

$$f(x, y) = e^{\frac{3x-2y}{x+y}}$$

en el origen. ¿Existe el límite doble?

✓ Solución

APARTADO 11 · LÍMITES SUCESIVOS O REITERADOS

Ejercicio 29**Calcula los límites reiterados de la función**

$$f(x, y) = \frac{x - 8y}{x + 14y}$$

en el origen.**✓ Solución****Paso 1** · primero $x \rightarrow 0$ y después $y \rightarrow 0$:

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 8y}{x + 14y} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-8y}{14y} = \frac{-8}{14} = -\frac{4}{7}$$

Paso 2 · primero $y \rightarrow 0$ y después $x \rightarrow 0$:

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - 8y}{x + 14y} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Paso 3 · los límites reiterados son distintos, así que el límite doble no existe:

$$L_1 = -\frac{4}{7}, \quad L_2 = 1, \quad \nexists \text{ límite doble}$$

 NOTAS

Ejercicio 30**La función**

$$f(x, y) = \frac{y^2 - 2x^2}{y^2 + 2x^2}$$

¿tiene límite en $(0, 0)$?**✓ Solución****Paso 1** · al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Calculo los **límites reiterados**.**Paso 2** · primero $x \rightarrow 0$ y después $y \rightarrow 0$:

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2 - 2x^2}{y^2 + 2x^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Paso 3 · primero $y \rightarrow 0$ y después $x \rightarrow 0$:

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - 2x^2}{y^2 + 2x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

Paso 4 · los límites reiterados son distintos ($L_1 \neq L_2$): la función **no tiene límite** en $(0, 0)$.

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - 2x^2}{y^2 + 2x^2}$$

 NOTAS

Ejercicio 31**Calcula los límites reiterados de la función**

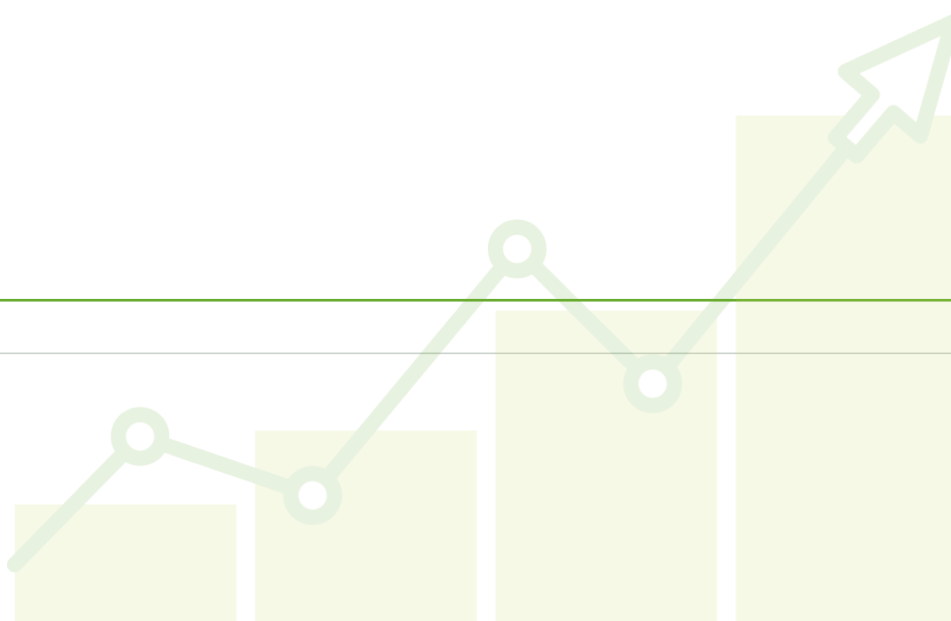
$$f(x, y) = (x + y) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{x + y}\right)$$

en el origen.**✓ Solución** **NOTAS**

Ejercicio 32

Calcula, si existe, el límite doble:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5xy}{3x^2 + y^2}.$$

✓ Solución NOTAS

Ejercicio 33

Estudia si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

✓ Solución NOTAS

Ejercicio 34**Estudia si existe el límite en el origen de la función**

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

✓ Solución**Paso 1** · al sustituir sale $\frac{0}{0}$. Me acerco al origen por los dos ejes.**Paso 2** · por el eje X ($y = 0$):

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Paso 3 · por el eje Y ($x = 0$):

$$f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$$

Paso 4 · son justo los dos límites reiterados, $L_2 = 1$ y $L_1 = 0$, y son distintos:

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

 NOTAS

Ejercicio 35**Estudia la existencia del límite doble en el origen de la función**

$$f(x, y) = \frac{3x^2y}{9x^4 + y^2}.$$

✓ Solución **NOTAS**

Ejercicio 36**Estudia el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de la función**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

✓ Solución **NOTAS**

APARTADO 12 · DEPENDENCIA DEL CAMINO · PARÁBOLAS

Ejercicio 37

Dada la función

$$z = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^4 + y^2 = 0 \end{cases}$$

¿tiene límite en $(0, 0)$?**✓ Solución**

Paso 1 · $x^4 + y^2 = 0$ solo ocurre en el origen. Fuera de él, la función es $\frac{3x^2y}{x^4 + y^2}$.

Paso 2 · límites reiterados:

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0 \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

Existen y son iguales, pero eso no asegura que el límite exista.

Paso 3 · me acerco por las **parábolas** $y = tx^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot tx^2}{x^4 + t^2x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tx^4}{x^4(1 + t^2)} = \frac{3t}{1 + t^2}$$

Paso 4 · el resultado **depende de** t : la función **no tiene límite** en $(0, 0)$.

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} z$$

APARTADO 13 · TÉCNICAS ALGEBRAICAS · SUSTITUCIÓN DIRECTA

Ejercicio 38

Calcula el siguiente límite aplicando la propiedad del límite del cociente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{3x - 2y}{x^2 + y^2}.$$

✓ Solución

APARTADO 13 · TÉCNICAS ALGEBRAICAS · PRODUCTO DE INFINITÉSIMOS

Ejercicio 39

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy.$$

✓ Solución

APARTADO 13 · TÉCNICAS ALGEBRAICAS · USO DE INFINITÉSIMOS

Ejercicio 40

Calcula el límite en el origen de la función

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

✓ Solución

NOTAS

Ejercicio 41

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

✓ Solución **NOTAS**

Ejercicio 42

Calcula, si existe, el límite doble:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (2x + 3y) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x+y}\right).$$

✓ Solución **NOTAS**

Ejercicio 43

Halla, si existen, el límite doble y los límites reiterados en el origen de la función

$$f(x, y) = 3x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2y}\right).$$

✓ Solución NOTAS

APARTADO 13 · TÉCNICAS ALGEBRAICAS · CERO POR ACOTADA

Ejercicio 44

Calcula el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \neq 0.$$

✓ Solución

Paso 1 · la función es un producto de dos factores. Estudio cada uno.

Paso 2 · el primer factor es un **infinitésimo**: $x \rightarrow 0$.

Paso 3 · el segundo factor está **acotado**: un coseno vale siempre entre -1 y 1 , aunque oscile sin parar cuando $y \rightarrow 0$.

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{y}\right) \leq 1 \implies |f(x, y)| \leq |x|$$

Paso 4 · por el teorema **cero por acotada**:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cdot \cos\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

APARTADO 13 · TÉCNICAS ALGEBRAICAS · CERO POR ACOTADA

Ejercicio 45

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

✓ Solución

Paso 1 · el primer factor es un **infinitésimo**: $x \rightarrow 0$.

Paso 2 · el segundo factor está **acotado**, porque es un seno:

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \leq 1 \implies |f(x, y)| \leq |x|$$

Paso 3 · por el teorema **cero por acotada**:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

Ejercicio 46

Calcula el siguiente límite:

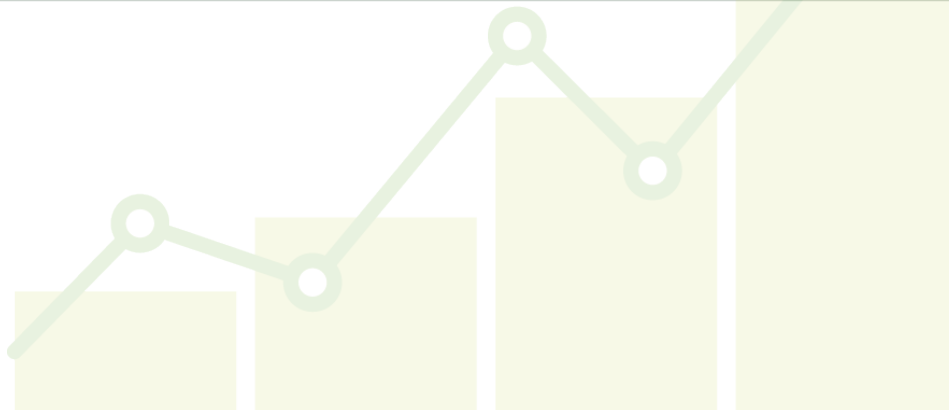
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

✓ Solución**Paso 1** · el primer factor es un **infinitésimo**: $x^2 + y^2 \rightarrow 0$.**Paso 2** · el segundo factor está **acotado**, porque es un coseno:

$$\left| \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \leq 1$$

Paso 3 · infinitésimo por función acotada. Por el teorema **cero por acotada**:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

 NOTAS

Ejercicio 47

Verifica si la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene límite en $(0, 0)$.☒ Solución NOTAS

Ejercicio 48

Calcula el siguiente límite, con $y \neq 0$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$$

✓ Solución

Paso 1 · no se puede sustituir, porque $\frac{1}{y}$ no está definido en $y = 0$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{y}$ no tiene límite. Separa la función en dos factores.

Paso 2 · x tiende a 0 cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: es un **infinitésimo**.

Paso 3 · $\operatorname{sen} \frac{1}{y}$ está **acotada**: vale siempre entre -1 y 1 . Por eso:

$$\left| x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{y} \right| \leq |x| \rightarrow 0$$

Paso 4 · por el teorema cero por acotada:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

NOTAS

Ejercicio 49

Los dos límites reiterados del siguiente límite son...

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - x + y}{x + y}$$

(a) -1 y 1 .(b) 0 y 1 .(c) 0 y 0 .(d) 1 y 1 .**✓ Solución****Ejercicio 50**

Los dos límites reiterados del siguiente límite son...

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{x-2y}{x+2y}}$$

(a) -1 y 1 .(b) e y $2e$.(c) 0 y e .(d) $\frac{1}{e}$ y e .**✓ Solución****Respuesta correcta: (d).**

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x-2y}{x+2y}} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{-2y}{2y}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \text{y} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{x-2y}{x+2y}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{x}} = e.$$

(a) son los límites de los exponentes, sin la exponencial.

NOTAS

Ejercicio 51

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 3y^2 + 6xy + xy^2}{x^2 + y^2}$$

- (a) 0. (b) 1.
(c) 3. (d) No existe el límite.

✓ Solución**Ejercicio 52**

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

- (a) 0. (b) $\frac{1}{2}$.
(c) 1. (d) No existe el límite.

✓ Solución NOTAS

Ejercicio 53

Calcula los límites direccionales según las direcciones $y = mx$ en el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

- (a) Todos los límites direccionales valen 0. (b) Los límites direccionales valen $\frac{1}{m}$.
 (c) Los límites direccionales valen m . (d) Los límites direccionales valen $1 + m$.

✓ Solución**Ejercicio 54**

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x}{\sqrt{2x+y}}$$

- (a) 0. (b) 1.
 (c) $\frac{1}{2}$. (d) No existe el límite.

✓ Solución**NOTAS**

Ejercicio 55

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) No existe el límite.

 **Solución****Ejercicio 56**

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{y \operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 - 1}$$

(a) 0.

(b) 1.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) No existe el límite.

 **Solución** **NOTAS**