



Qué llevarte en la cabeza.

Un vistazo rápido a todo el tema: qué es una función de dos variables, cómo se calcula su dominio, cómo se representa y qué son las curvas de nivel. Pensado para **repasar antes de un ejercicio**.

⚠ Es el lenguaje de todo lo demás.

De este tema **no hay preguntas directas en el examen**. Sin embargo, es la **base imprescindible**: las preguntas del examen son de funciones de varias variables.

1 · Función de dos variables

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad z = f(x, y) \quad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Asigna a cada par ordenado (x, y) de A un **único** número real z .

- ▶ x, y : variables **independientes**. z : variable **dependiente**.
- ▶ **Dominio**, D_f : el conjunto de partida A .
- ▶ **Codomnio**: el conjunto de llegada, $\mathbb{R}$.
- ▶ **Conjunto imagen**, I_f : los números que son imagen de algún par del dominio.

Formas de escribirla

- ▶ **Explícita**: $z = f(x, y)$
- ▶ **Implícita**: $F(x, y, z) = 0$

Evaluar

- ▶ $f(a, b)$: se sustituye x por a e y por b .

2 · Dominio de la función

Todos los pares (x, y) para los que la expresión toma un valor real. Es una **región del plano** xy .

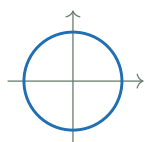
Las tres reglas

- ▶ Denominador: $B(x, y) \neq 0$
- ▶ Raíz de índice par: $A(x, y) \geq 0$
- ▶ Logaritmo: $A(x, y) > 0$
- ▶ Raíz en un denominador: $A(x, y) > 0$
- ▶ Varias a la vez: la **intersección**.

El borde de la región

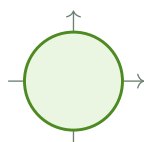
- ▶ $\leq, \geq$: pertenece. Línea **continua**.
- ▶ $<, >, \neq$: no pertenece. Línea **discontinua**.

📄 Curvas que aparecen al dibujar dominios y curvas de nivel



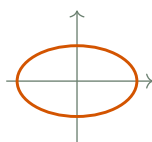
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Circunferencia de radio r



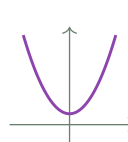
$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

Disco cerrado



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipse de semiejes a, b



$$y = ax^2 + c$$

Parábola



$$xy = k$$

Hipérbola equilátera

3 · Representación gráfica

La gráfica de $z = f(x, y)$ es la **superficie** de $\mathbb{R}^3$ formada por los puntos $(x, y, f(x, y))$.

Intersecciones con los ejes

Se anulan **dos** variables y se despeja la tercera.

- ▶ Eje x : $y = 0$ y $z = 0$
- ▶ Eje y : $x = 0$ y $z = 0$
- ▶ Eje z : $x = 0$ e $y = 0$

Trazas (cortes con los planos coordenados)

Se anula **una** variable.

- ▶ Plano xy : $z = 0$
- ▶ Plano xz : $y = 0$
- ▶ Plano yz : $x = 0$

Superficies que se reconocen

- ▶ $Ax + By + Cz + D = 0$: **plano**.
- ▶ $z = x^2 + y^2 + c$: **paraboloide**.
- ▶ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$: **esfera** de radio r .

4 · Curvas de nivel

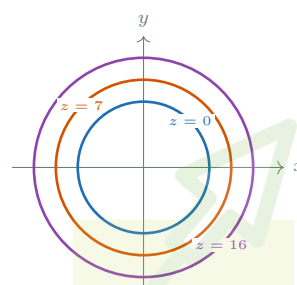
$$C_{z=k} = \{(x, y) \in \text{Df} / f(x, y) = k\}$$

Proyección sobre el plano xy del corte de la superficie con el plano horizontal $z = k$: los puntos donde la función vale lo mismo.

Cómo se calculan

- ▶ **Fija** un valor $z = k$.
- ▶ **Resuelve** $f(x, y) = k$.
- ▶ **Dibuja** la curva en el plano xy .
- ▶ Si $f(x, y) = k$ no tiene solución real, esa curva **no existe**.

Ejemplo: $z = x^2 + y^2 - 9$



5 · Aplicaciones económicas

Funciones

- ▶ Demanda: $D_1 = f(p_1, p_2)$, $D = f(p, I)$
- ▶ Ingreso: $I = p_1 q_1 + p_2 q_2$
- ▶ Coste: $C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + CF$
- ▶ Producción: $q = f(x_1, x_2)$
- ▶ Producción conjunta: $x = f(q_1, q_2)$
- ▶ Utilidad: $U = f(q_1, q_2)$

Dominio

- ▶ Variables no negativas: **primer cuadrante**.

Nombre de sus curvas de nivel

Función	Curva de nivel
Ingreso	Isoingreso
Coste total de producción	Isocoste
Producción	Isocuanta
Producción conjunta	Curva de transformación
Utilidad	Curva de indiferencia

Cómo son (utilidad y producción)

- ▶ No se cortan y son decrecientes.
- ▶ Al aumentar el nivel, se alejan del origen.
- ▶ Son convexas al origen.

✓ EN RESUMEN

Lo que no te puedes olvidar antes de pasar al Tema 4:

- **Gráfica:** una superficie en $\mathbb{R}^3$. **Dominio:** una región del plano.
- **Reglas del dominio:** denominadores $\neq 0$, radicandos ≥ 0 , logaritmos > 0 ; todas a la vez.
- **Representar:** cortes con los ejes (anular dos variables) y trazas (anular una).
- **Curvas de nivel:** $f(x, y) = k$. En economía: isocuanta, isocoste y curva de indiferencia.