



Qué vas a aprender.

Qué es una **función de dos variables** $z = f(x, y)$ (una regla que a cada par (x, y) le asigna un número z). A calcular su **dominio** (en el plano $\mathbb{R}^2$) y a hacer una **representación gráfica** de la superficie que la función dibuja en el espacio $\mathbb{R}^3$, con sus **curvas de nivel**. Y cómo se usa todo esto en las **funciones económicas** (producción, coste, utilidad...).

$$f(x, y) = z = x^2 + y^2$$

⚠ Lee esto antes de empezar.

De este tema **no hay preguntas directas en el examen**. Sin embargo, es la **base imprescindible** para los temas siguientes (límites, continuidad, derivadas parciales y optimización en varias variables). Las **10 preguntas** del examen son de funciones de **varias** variables: este tema introduce todo el lenguaje.

🌐 Mapa del tema

🌐 Para qué sirve cada apartado

#	Apartado	Lo vas a usar sobre todo en...
1	¿Qué es una función de dos variables?	Toda la asignatura (bloques 1–4)
2	Dominio de una función de dos variables	T4 (límites) · T5 (continuidad)
3	Representación gráfica en $\mathbb{R}^3$	T5 (continuidad) · T8–T9 (optimización)
4	Curvas de nivel	T8–T9 (optimización, con y sin restricciones)
5	Aplicaciones económicas	T8–T9 (optimización): producción, coste, utilidad

💡 **Idea clave.** Si una función de una variable se dibuja como una **curva** en el plano, una función de dos variables se dibuja como una **superficie** en el espacio. Las **curvas de nivel** son los cortes horizontales de esa superficie: lo mismo que las líneas de altura de un mapa topográfico. En economía tienen nombre propio (isocuantas, isocostes, curvas de indiferencia): están en el apartado 5.

1 ¿Qué es una función de dos variables?

✦ Qué es

Una **función real de dos variables** asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto de partida $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un **único** número real z :

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad z = f(x, y)$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto x + y - 1$$

$$z = x + y - 1$$

Como en una variable, deben cumplirse las condiciones de **existencia** (todo par de A tiene imagen) y de **unicidad** de la imagen. x e y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

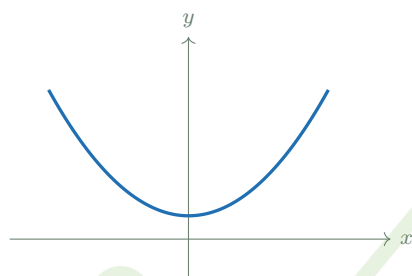
- **Dominio**, D_f : el conjunto de partida A . El conjunto de llegada, $\mathbb{R}$, es el **codominio**.
- **Conjunto imagen** o imagen, I_f : los números reales que son imagen de algún par del dominio.
- **Forma explícita**: $z = f(x, y)$. Ejemplos: $z = x^2 + y^2$, $z = 4 - x - 2y$.
- **Forma implícita**: $F(x, y, z) = 0$. Ejemplo: $x + 2y + z - 4 = 0$.

$$z - x - y + 1 = 0$$

$$z - x^2 - y^2 = 0$$

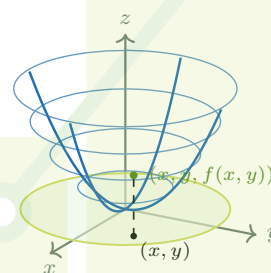
$\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

📐 Cómo se ve · del plano a la superficie



$y = f(x)$ · curva en el plano

$$y = x^2 + 1$$

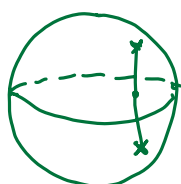


$z = f(x, y)$ · superficie en $\mathbb{R}^3$

🔍 Cómo se trabaja

1. **Evaluar** $f(a, b)$: sustituye x por a e y por b en la fórmula.
2. **Pasar de implícita a explícita**: cuando puedas, despeja z a partir de $F(x, y, z) = 0$. P. ej., de $x + 2y + z - 4 = 0$ se obtiene $z = 4 - x - 2y$.
3. **Reconocer el tipo** para anticipar su gráfica: $z = ax + by + c$ es un **plano**; $z = x^2 + y^2 + c$ es un **paraboloides**; $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es una **esfera**.

$$z = x + y - 2 \quad f(1, 3) = 1 + 3 - 2 = 2$$



NO UNICIDAD $\Rightarrow$ no función

$$z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

Ejemplo resuelto

Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, calcula $f(1, 2)$ y $f(0, 0)$. Escribe después en forma explícita la función definida por $x + 2y + z - 4 = 0$.

$$f(1, 2) = 1^2 + 2^2 - 4 = 1$$

$$f(0, 0) = 0^2 + 0^2 - 4 = -4$$

Implícita $\longrightarrow$ Explícita
despejar z

$$x + 2y + z - 4 = 0 \longrightarrow z = 4 - x - 2y \quad \text{PLANO}$$

Implícita $\longrightarrow$ Explícita.

NOTAS

Evaluar = Sustituir

$$f(a, b) \Rightarrow \begin{matrix} \downarrow \\ \text{Sust} \end{matrix} \begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix}$$

ORDEN IMPORTA

$$f(a, b) \neq f(b, a)$$

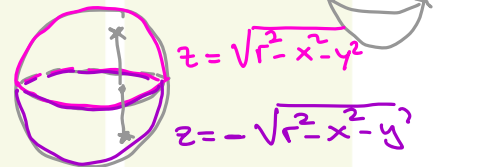
PLANO : $z = ax + by + c$

PARABOLOIDE : $z = x^2 + y^2 + c$

ESFERA : $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$

$\Downarrow$
No es función $\Rightarrow (x, y) \Rightarrow 2$ valores de z

PUNTO : $(x, y, f(x, y))$



✓ EN RESUMEN

Una función de dos variables $z = f(x, y)$ asigna a cada par (x, y) de su dominio **un único** número real z . Puede darse de forma explícita ($z = f(x, y)$) o implícita ($F(x, y, z) = 0$). Su gráfica es una **superficie** en $\mathbb{R}^3$.

2 Dominio de una función de dos variables

Qué es

Si no se indica otra cosa, el **dominio** D_f de una función de dos variables está formado por **todos los pares ordenados** (x, y) para los que la expresión de la función toma un valor real. Geométricamente es una **región del plano** xy , porque cada par (x, y) es un punto del plano. Se aplican las **mismas reglas** que en las funciones de una variable:

Las 3 reglas (iguales que en una variable)

Si en la fórmula aparece...

tiene que cumplirse...

un denominador $\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$

$B(x, y) \neq 0$ (denominador distinto de cero)

una raíz de índice par $\sqrt{A(x, y)}$

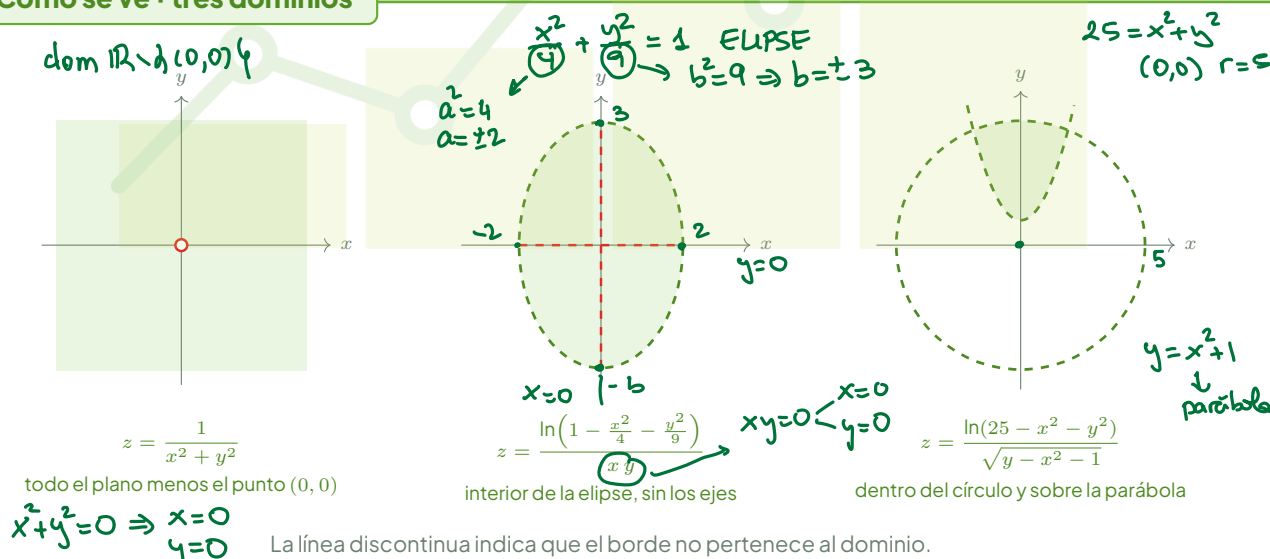
$A(x, y) \geq 0$ (radicando no negativo)

un logaritmo $\ln A(x, y)$

$A(x, y) > 0$ (argumento positivo)

Si hay **varias** de estas situaciones a la vez, se cumplen **todas al mismo tiempo**: el dominio es la **intersección** de todas las condiciones.

Cómo se ve · tres dominios



🔗 Cómo se trabaja

1. **Localiza** los denominadores, raíces de índice par y logaritmos, e **impón** cada condición: $B \neq 0, A \geq 0, A > 0$. $z = \ln A(x,y)$ $z = \frac{1}{B(x,y)}$ $z = \sqrt{A(x,y)}$
2. **Resuelve** cada desigualdad en el plano (x, y) : obtendrás una **región** limitada por una curva conocida, como la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ o la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
3. **Interseca** todas las regiones.
4. Describe el dominio con **notación de conjunto** y dibuja la región. El borde va con **línea continua** si pertenece al dominio ($\leq, \geq$) y con **línea discontinua** si no pertenece ($<, >, \neq$).

🖋 Ejemplo resuelto

Determina y representa gráficamente el dominio de $z = \sqrt{-x^2 - y^2 + 25}$.

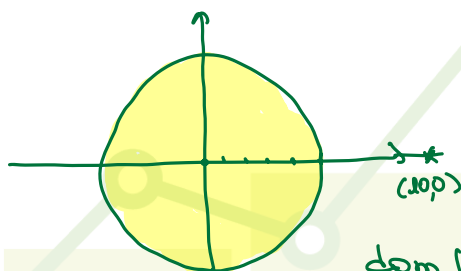
$$\text{Raíz índice PAR} \Rightarrow -x^2 - y^2 + 25 \geq 0$$

$$25 \geq x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

↳ Circunf. Centro $(0,0)$ y el radio 5

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow \text{Circunf. } C(a,b) \text{ radio } r$$



$$(0,0) \Rightarrow -0^2 - 0^2 + 25 \geq 0 \quad \text{Si}$$

$$(10,0) \Rightarrow -10^2 - 0^2 + 25 = -75 \geq 0 \quad \text{NO}$$

$$\text{dom } f(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 - y^2 + 25 \geq 0\}$$

NOTAS: Dominio $\Rightarrow$ Región del plano xy

$\leq, \geq \rightarrow$ línea continua.

$<, >, \neq \rightarrow$ línea discontinua.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

↳ Circunf. (a,b) r

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elipse.}$$

✓ EN RESUMEN

El dominio D_f es el conjunto de pares (x, y) para los que la expresión toma un valor real. Tienen que cumplirse **todas** las condiciones: denominadores $\neq 0$, radicandos (índice par) ≥ 0 y argumentos de logaritmo > 0 . Gráficamente, es una **región** del plano xy .

3 Representación gráfica en $\mathbb{R}^3$

Qué es

Para representar una función de dos variables se usan **tres ejes** perpendiculares (x, y, z) que se cortan en el **origen de coordenadas**. A cada punto del espacio le corresponde una terna ordenada (x, y, z) ; el conjunto de todas las ternas es $\mathbb{R}^3$. La **representación gráfica** de $z = f(x, y)$ es la **superficie** formada por los puntos $(x, y, f(x, y))$, con (x, y) en el dominio. Para hacerse una idea de ella se calculan sus intersecciones con los ejes y con los planos coordenados:

Intersecciones con los ejes y con los planos

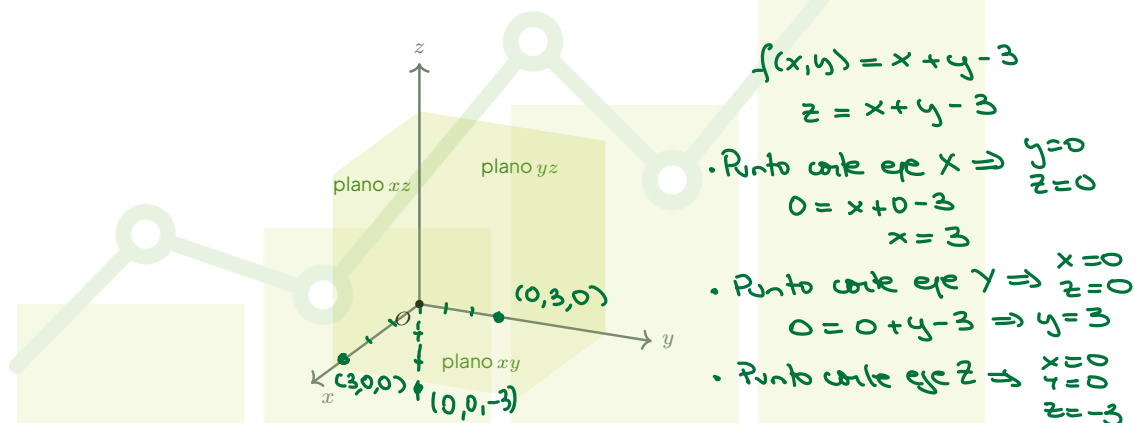
A · Intersecciones con los ejes coordenados. Se igualan a cero **dos** variables y se despeja la tercera.

$$\text{Eje } x: y = 0 \text{ y } z = 0. \quad \text{Eje } y: x = 0 \text{ y } z = 0. \quad \text{Eje } z: x = 0 \text{ y } y = 0.$$

B · Intersecciones con los planos coordenados, llamadas **trazas**. Se obtienen anulando **una** de las variables.

$$\text{Plano } xy: z = 0. \quad \text{Plano } xz: y = 0. \quad \text{Plano } yz: x = 0.$$

Cómo se ve · los tres ejes y los tres planos coordenados

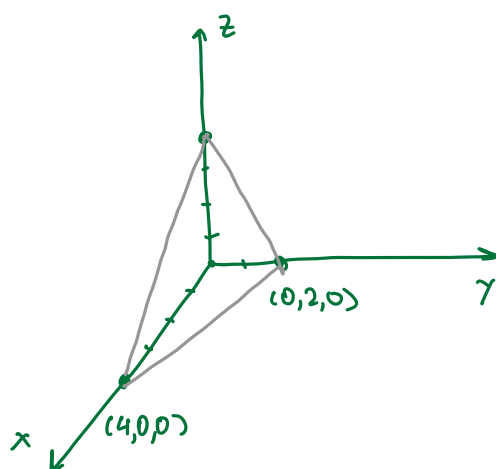


Cómo se trabaja

- Escribe** la ecuación de la superficie en la forma $F(x, y, z) = 0$ (p. ej., $x + 2y + z - 4 = 0$ para el plano $z = 4 - x - 2y$).
- Intersecciones con los ejes:** anula **dos** de las tres variables y despeja la tercera. Obtendrás tres puntos: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.
- Intersecciones con los planos coordenados:** anula **una** de las tres variables. Obtendrás tres curvas, las trazas (en el caso de un plano, tres **rectas**).
- Dibuja** los tres puntos y las tres curvas en los ejes para hacerte una idea de la superficie.

Ejemplo resuelto

Representa la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación lineal $x + 2y + z - 4 = 0$.



$$\text{Eje } x \Rightarrow \begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

$$x + 0 + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Eje } y \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

$$0 + 2y + 0 - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Eje } z \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

$$0 + 0 + z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$$

Trazas $\Rightarrow$ planos coordenados

$$\text{Plano } XY \Rightarrow z=0 \Rightarrow x + 2y + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{Plano } YZ \Rightarrow x=0 \Rightarrow 0 + 2y + z - 4 = 0 \Rightarrow 2y + z - 4 = 0$$

$$\text{Plano } XZ \Rightarrow y=0 \Rightarrow x + 0 + z - 4 = 0 \Rightarrow x + z - 4 = 0$$

NOTAS

Corte con los ejes $\Rightarrow$ ANULAR 2 variables

$$Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \text{Plano}$$

Corte con los planos $\Rightarrow$ Anular 1 variable

$$\begin{matrix} \rightarrow \text{eje } x \Rightarrow y=z=0 \\ \rightarrow \text{eje } y \Rightarrow x=z=0 \\ \rightarrow \text{eje } z \Rightarrow x=y=0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow XY \Rightarrow z=0 \\ \rightarrow XZ \Rightarrow y=0 \\ \rightarrow YZ \Rightarrow x=0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow XY \Rightarrow z=0 \\ \rightarrow XZ \Rightarrow y=0 \\ \rightarrow YZ \Rightarrow x=0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow XY \Rightarrow z=0 \\ \rightarrow XZ \Rightarrow y=0 \\ \rightarrow YZ \Rightarrow x=0 \end{matrix} \quad \text{RECTA.}$$

✓ EN RESUMEN

Para representar una superficie en $\mathbb{R}^3$ calculamos sus **intersecciones con los tres ejes** (dos coordenadas nulas) y sus intersecciones con los tres planos coordenados, las **trazas** (una coordenada nula). En el caso de un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ se obtienen tres puntos y tres rectas que dibujan el plano.

4 Curvas de nivel

Qué es

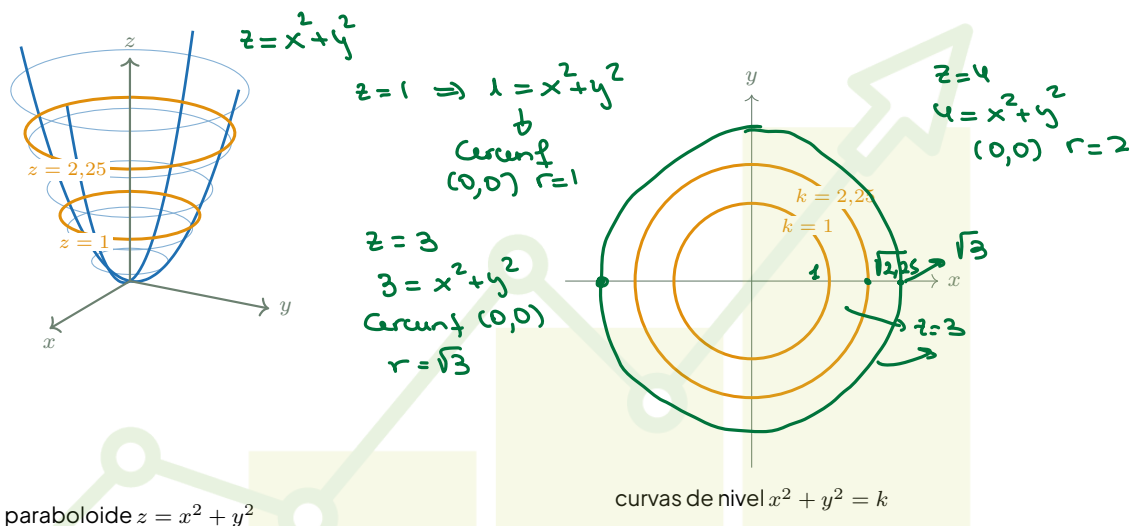
Si cortamos la superficie $z = f(x, y)$ con planos paralelos al plano xy (planos de la forma $z = k$), obtenemos unas curvas llamadas **secciones planas horizontales**. Sus **proyecciones sobre el plano xy** son las **curvas de nivel** de la función.

La curva de nivel asociada al valor k es el conjunto de puntos del dominio en los que la función toma ese valor constante:

$$C_{z=k} = \{(x, y) \in Df / f(x, y) = k\}$$

Es decir, reúne los puntos del plano xy en los que la función alcanza la **misma altura** k , como las líneas de altura de un mapa topográfico. Permiten estudiar una superficie trabajando solo en el plano.

Cómo se ve · del paraboloide a sus círculos



Cómo se trabaja

1. **Fija** un valor constante $z = k$.
2. **Corta** la superficie con ese plano horizontal: resuelve $f(x, y) = k$. Normalmente obtienes una curva conocida: una **recta**, una **circunferencia**, una **elipse**, una **hipérbola**...
3. **Proyecta** la curva sobre el plano xy y dibújala. Repite con otros valores de k y etiqueta cada curva con el suyo.
4. Si para algún k la ecuación $f(x, y) = k$ **no tiene solución real**, esa curva de nivel **no existe**.

Ejemplo resuelto

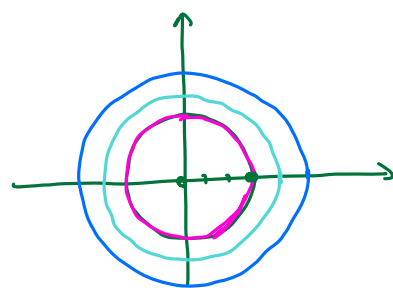
Halla y representa las curvas de nivel de la función $z = x^2 + y^2 - 9$ para $z = 0$, $z = 7$ y $z = 16$.

$$\textcircled{1} \quad k=0 \Rightarrow 0 = x^2 + y^2 - 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \rightarrow \text{Circunf. } (0,0) \quad r=3$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{Circunf. } (a,b) \quad r$$

$$\textcircled{2} \quad k=7 \Rightarrow 7 = x^2 + y^2 - 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \rightarrow \text{Circunf. } (0,0) \quad r=4$$

$$\textcircled{3} \quad k=16 \Rightarrow 16 = x^2 + y^2 - 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \rightarrow \text{Circunf. } (0,0) \quad r=5$$



$k=0$
 $k=7$
 $k=16$

NOTAS

Curva de nivel $\Rightarrow f(x,y) = k$ (se proyecta en el plano xy)

Si $f(x,y) = k$ No tiene solución real $\Rightarrow$ esa curva No existe.

Curvas de niveles distintos NO se cortan.

$k=0 \Rightarrow$ Coincide con la traza sobre el plano xy ($z=0$)

✓ EN RESUMEN

Las curvas de nivel $C_{z=k}$ son las proyecciones sobre el plano xy de los cortes horizontales de la superficie $z = f(x,y)$. Para cada k se resuelve la ecuación $f(x,y) = k$ y se dibuja la curva resultante (o se concluye que **no existe** si la ecuación no tiene solución real). En conjunto forman un mapa de alturas que describe la superficie.

5 Aplicaciones económicas

📌 Qué es · funciones económicas de dos variables

En los fenómenos económicos casi siempre intervienen varios factores a la vez. Las funciones de dos variables más habituales son:

- **Demanda:** $D_1 = f(p_1, p_2)$, la cantidad demandada de un bien según su precio p_1 y el precio p_2 de otro bien relacionado. Con renta: $D = f(p, I)$.
- **Ingreso:** $I = p_1q_1 + p_2q_2$, el ingreso total al vender las cantidades q_1 y q_2 de dos bienes a los precios p_1 y p_2 .
- **Coste de producción:** $C = f(q_1, q_2)$. Con insumos variables: $C = p_1x_1 + p_2x_2 + CF$, donde x_1, x_2 son las cantidades de factores, p_1, p_2 sus precios y CF el coste fijo.
- **Producción:** $q = f(x_1, x_2)$, la cantidad producida con las cantidades x_1 y x_2 de dos factores.
- **Producción conjunta:** $x = f(q_1, q_2)$, la cantidad de un insumo común necesaria para producir q_1 y q_2 .
- **Utilidad:** $U = f(q_1, q_2)$, el nivel de satisfacción de un consumidor con las cantidades q_1 y q_2 de dos bienes.

Dominio: las variables económicas (cantidades, precios) no pueden ser negativas, así que el dominio suele restringirse al **primer cuadrante** del plano. La gráfica queda en el **primer octante** del espacio ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

📄 Cómo se llaman sus curvas de nivel

Función	Curva de nivel	Qué reúne
Ingreso	Isoingreso	Combinaciones de ventas (q_1, q_2) que dan el mismo ingreso total.
Coste total de producción	Isocoste	Combinaciones de insumos (x_1, x_2) que implican el mismo coste total.
Producción	Isocuanta	Combinaciones de factores (x_1, x_2) que permiten el mismo nivel de producción.
Producción conjunta	Curva de transformación	Combinaciones de cantidades producidas (q_1, q_2) con la misma cantidad de un insumo común.
Utilidad	Curva de indiferencia	Combinaciones de consumo (q_1, q_2) que dan al consumidor la misma utilidad.

🚫 Cómo son las curvas de nivel de utilidad y de producción

1. Las curvas de distintos niveles **no se cortan** (si se cortaran, un mismo punto tendría dos imágenes).
2. Son **decrecientes**.
3. Al aumentar el nivel k , las curvas **se alejan del origen**.
4. Son **convexas al origen** de coordenadas.

Ejemplo resuelto

Halla y representa las curvas de indiferencia de la función de utilidad $U = q_1 \cdot q_2$ para los niveles de utilidad $U = 5$ y $U = 10$.

$$U = q_1 \cdot q_2 \quad \textcircled{1} \text{ Dominio: } q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$$

$$\textcircled{1} U = 5 \quad q_1 \cdot q_2 = 5$$

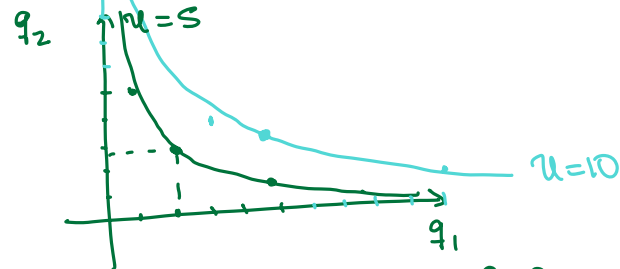
$$q_2 = \frac{5}{q_1}$$

$$\textcircled{2} U = 10 \quad q_1 \cdot q_2 = 10$$

$$q_2 = \frac{10}{q_1}$$

No se cortan

Nivel mayor $\rightarrow$ más lejos del origen.



$$U=5$$

q_1	q_2
1	5
5	1
10	0,2
2	2,5
$\vdots$	$\vdots$

$$U=10$$

q_1	q_2
1	10
2	5
5	2
10	1
20	0,5
$\vdots$	$\vdots$

NOTAS

Ingreso $\rightarrow$ Isoingreso

Coste $\rightarrow$ isocoste

Producción $\rightarrow$ isocuanta

Prod. orig $\rightarrow$ curva de transformación

Utilidad $\rightarrow$ curva de indiferencia

Dominio Económico $\Rightarrow$ 1º cuadrante
Cant, prec ≥ 0 .

Curvas de nivel no se cortan
decrecient; se alejan al origen
si K aumenta.

✓ EN RESUMEN

Las funciones económicas de dos variables (demanda, ingreso, coste, producción, utilidad) se estudian en el **primer cuadrante**. Sus curvas de nivel tienen nombre propio: **isoingreso**, **isocoste**, **isocuanta**, **curva de transformación** y **curva de indiferencia**.

 Cuadro comparativo · de una variable a dos variables

 Qué cambia al pasar de $f(x)$ a $f(x, y)$

Concepto	Una variable (T2)	Dos variables (T3)
Función	$y = f(x)$	$z = f(x, y)$
Entrada	un número $x \in \mathbb{R}$	un par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
Dominio	subconjunto de $\mathbb{R}$ (unión de intervalos)	subconjunto de $\mathbb{R}^2$ (región del plano)
Gráfica	curva en el plano $\mathbb{R}^2$	superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$
Reglas del dominio	denominador $\neq 0$, radicando ≥ 0 , logaritmo > 0	las mismas , aplicadas a $A(x, y)$
Representación	tabla de valores y puntos clave	cortes con los ejes, trazas y curvas de nivel



→ Para qué te sirve en los temas siguientes

→ Dónde se usa cada contenido

Función de dos variables	T4–T5 · límites y continuidad. Son el objeto de estudio de todos los temas siguientes. 10 de las 10 preguntas del examen van sobre funciones de varias variables.
Dominio	T4 · límites y T5 · continuidad. Antes de calcular un límite en un punto o estudiar la continuidad hay que saber si la función está definida allí.
Representación gráfica	T5 · continuidad y T8–T9 · optimización. Ayuda a entender el comportamiento global de la función y a localizar sus máximos y mínimos.
Curvas de nivel	T8–T9 · optimización, con y sin restricciones: ayudan a ver dónde alcanza la función sus valores más altos y más bajos.
Aplicaciones económicas	T8–T9 · optimización. Las funciones de producción, coste y utilidad, con sus isocuantas, isocostes y curvas de indiferencia, son los enunciados habituales de los problemas económicos.

✓ EN RESUMEN

Lo que no te puedes olvidar antes de pasar al Tema 4:

- Una función de dos variables $z = f(x, y)$ se dibuja como una **superficie** en el espacio $\mathbb{R}^3$; su dominio es una **región** del plano $\mathbb{R}^2$.
- El **dominio** se calcula con las **mismas tres reglas** que en una variable: denominadores $\neq 0$, radicandos (índice par) ≥ 0 , argumentos de logaritmo > 0 . Si hay varias condiciones, se cumplen **todas a la vez** (intersección).
- Para **representar** una superficie: intersecciones con los tres **ejes** (anular dos variables) y **trazas** sobre los tres planos coordenados (anular una variable).
- Las **curvas de nivel** $f(x, y) = k$ reúnen los puntos donde la función vale lo mismo. Si para algún k la ecuación no tiene solución real, esa curva **no existe**.
- En **economía** las curvas de nivel tienen nombre propio: isocuanta (producción), isocoste (coste) y curva de indiferencia (utilidad).

