



Qué vas a aprender.

A reconocer por su ecuación las curvas que aparecen en la asignatura (**rectas**, **parábolas**, **circunferencias** y **elipses**), a hallar sus **puntos de corte** y a describir **regiones** del plano.

⚠ Lee esto antes de empezar.

De este tema **no hay preguntas directas** en el examen. Sin embargo, es la base imprescindible para resolver las que sí entran.

🌐 Mapa del bloque

🌐 Para qué sirve cada apartado

#	Apartado	Lo vas a usar sobre todo en...
1	Rectas	T4 (límites radiales) · T6
2	Parábolas	T4 · T10 (áreas)
3	Circunferencias	T3 (curvas de nivel) · T9
4	Elipses e hipérbolas	T3 · T9 (restricciones)
5	Puntos de corte entre dos curvas	T10 y T11 (integrales)
6	Regiones del plano	T3 (dominios) · T11

💡 **Idea clave.** En las funciones de dos variables todo ocurre en el plano: los dominios son **regiones**, las curvas de nivel son **curvas** y las restricciones también. Hay que saber verlas a partir de su ecuación.

1 Rectas

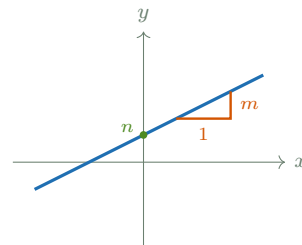
Qué es

La ecuación de una **recta** es

$$y = mx + n$$

- m es la **pendiente**: lo que sube y cuando x avanza 1. Si $m > 0$, la recta tiene **pendiente positiva**; si $m < 0$, tiene **pendiente negativa**.
- n es la **ordenada en el origen**: el corte con el eje Y .

Las rectas que pasan por el origen son $y = mx$.



Cómo se halla la ecuación

- Pendiente entre dos puntos: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
- Recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente m (**punto-pendiente**): $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente.

Ejemplo resuelto

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, 8)$.

Paso 1 · calculo la pendiente:

$$m = \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Paso 2 · uso la ecuación punto-pendiente con el punto $(1, 2)$:

$$y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$$

Paso 3 · compruebo con el otro punto: $3 \cdot 3 - 1 = 8$. Pasa por $(3, 8)$.

✓ EN RESUMEN

Una recta queda fijada por un punto y la pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

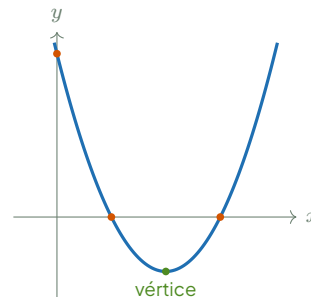
2 Parábolas

Qué es

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una **parábola**.

- Si $a > 0$ se abre hacia arriba (U) y el vértice es un mínimo. Si $a < 0$ se abre hacia abajo (∩) y es un máximo.
- El **vértice** está en $x_v = -\frac{b}{2a}$.
- Corta al eje X en las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ y al eje Y en $(0, c)$.

Las parábolas con vértice en el origen son $y = mx^2$.



Ejemplo resuelto

Halla el vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 3$.

Paso 1 · $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$. Su altura es $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$.

Vértice: $(2, -1)$

Como $a = 1 > 0$, la parábola se abre hacia arriba y el vértice es un mínimo.

Ejemplo resuelto

Halla los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = x^2 - 4x + 3$.

Paso 1 · eje X : $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$, es decir, $x = 1$ y $x = 3$.

Paso 2 · eje Y : $x = 0$ da $y = 3$.

$(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 3)$

✓ EN RESUMEN

Parábola: el signo de a dice hacia dónde se abre, y el vértice está en $x_v = -\frac{b}{2a}$.

3 Circunferencias

Qué es

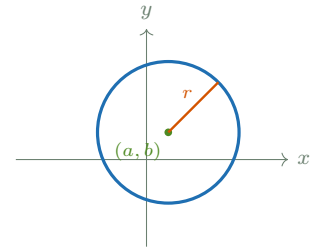
La **circunferencia** de centro (a, b) y radio r está formada por los puntos que están a distancia r del centro:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Si el centro es el origen: $x^2 + y^2 = r^2$.

La **distancia** entre dos puntos es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Cómo reconocerla

Si la ecuación viene desarrollada, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, se **completan cuadrados**: se agrupan los términos en x y en y , y a cada grupo se le suma y se le resta lo que le falta para ser el cuadrado de un binomio.

Ejemplo resuelto

Halla el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

Paso 1 · agrupo los términos en x y en y :

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 4$$

Paso 2 · completo cuadrados: $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$ y $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$.

$$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Paso 3 · comparo con $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$:

$$\text{centro } (1, -2) \quad \text{radio } r = 3$$

✓ EN RESUMEN

$x^2 + y^2 = r^2$ es la circunferencia de centro el origen y radio r . El radio es la raíz del número de la derecha.

4 Elipses e hipérbolas

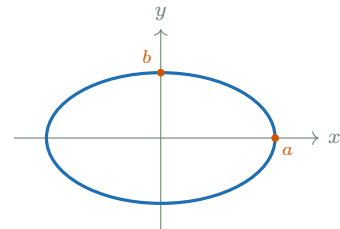
Qué es

La **elipse** de centro el origen y semiejes a y b es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Corta al eje X en $(\pm a, 0)$ y al eje Y en $(0, \pm b)$. Si $a = b$, es una circunferencia.

Se reconoce porque x^2 e y^2 aparecen **sumando** con coeficientes **distintos**, como en $2x^2 + 3y^2 = 6$.



Hipérbolas

Si x^2 e y^2 aparecen **restando**, como en $x^2 - y^2 = 1$, la curva es una **hipérbola**. También lo es $x \cdot y = k$, la gráfica de $y = \frac{k}{x}$. Estas curvas aparecen como curvas de nivel y como restricciones.

Ejemplo resuelto

Halla los semiejes de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Paso 1 · x^2 e y^2 suman con coeficientes distintos: es una elipse. Divido entre 36 para que quede igualada a 1:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Paso 2 · comparo: $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, así que los semiejes son $a = 3$ y $b = 2$.

$$a = 3 \quad y \quad b = 2$$

La elipse corta a los ejes en $(\pm 3, 0)$ y $(0, \pm 2)$.

✓ EN RESUMEN

x^2 e y^2 sumando: circunferencia (mismos coeficientes) o elipse (distintos). Restando: hipérbola.

5 Puntos de corte entre dos curvas

Cómo se trabaja

Los **puntos de corte** de dos curvas son los puntos que cumplen las dos ecuaciones a la vez: son las soluciones del **sistema** formado por las dos.

1. Si las dos están despejadas, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, se **igualan**: $f(x) = g(x)$.
2. Se resuelve la ecuación. Cada solución es la x de un punto de corte.
3. Se sustituye cada x en cualquiera de las dos para hallar su y .

Se usa para calcular el área entre dos curvas y para fijar los límites de una integral doble.

Ejemplo resuelto

Halla los puntos de corte de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.

Paso 1 · igualo las dos expresiones:

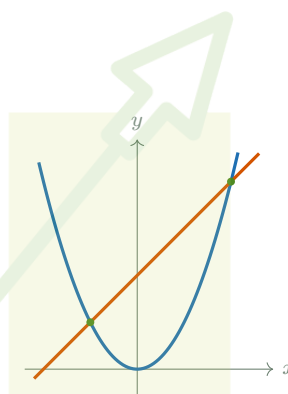
$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Paso 2 · resuelvo:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = -1, x = 2$$

Paso 3 · sustituyo en $y = x + 2$: $y = 1$ e $y = 4$.

$$(-1, 1) \text{ y } (2, 4)$$



EN RESUMEN

Cortar dos curvas es resolver el sistema de sus ecuaciones: igualar, resolver y sustituir.

6 Regiones del plano

Qué es

Una ecuación en x e y es una **curva**. Una **desigualdad** es una **región**: todos los puntos que quedan a uno de los lados de esa curva.

$y \geq f(x)$ puntos que están **por encima** de la curva $y = f(x)$

$y \leq f(x)$ puntos que están **por debajo**

$x^2 + y^2 \leq r^2$ **interior** de la circunferencia (el círculo)

$x^2 + y^2 \geq r^2$ **exterior** de la circunferencia

Con $\leq$ o $\geq$ el borde entra; con $<$ o $>$, no. En caso de duda, se prueba **un punto**: si cumple la desigualdad, su lado es la región. Así se describen los dominios de las funciones de dos variables y los recintos de las integrales dobles.

Ejemplo resuelto

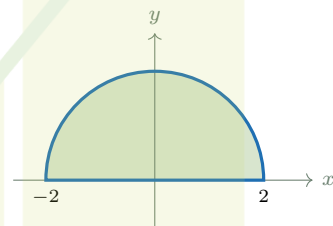
Describe la región del plano que cumple $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq 0$.

Paso 1 · $x^2 + y^2 = 4$ es la circunferencia de centro el origen y radio 2. Pruebo el punto $(0,0)$: $0 \leq 4$, cumple. La región es el **interior**, con el borde.

Paso 2 · $y \geq 0$ son los puntos del eje X hacia arriba.

Paso 3 · «y» significa que se cumplen las dos a la vez:

el semicírculo superior de radio 2



✓ EN RESUMEN

Igualdad, curva; desigualdad, región. Para saber qué lado es, se prueba un punto.

✓ Lo que no te puedes olvidar

📄 Cómo reconocer una curva por su ecuación

Ecuación	Curva
$y = mx + n$	recta de pendiente m
$y = ax^2 + bx + c$	parábola con vértice en $x_v = -\frac{b}{2a}$
$x^2 + y^2 = r^2$	circunferencia de centro el origen y radio r
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	elipse de semiejes a y b
$x^2 - y^2 = k$ o $xy = k$	hipérbola

✓ EN RESUMEN

Antes de pasar al bloque de matrices:

- **Recta:** un punto y la pendiente, $y - y_0 = m(x - x_0)$. Por el origen, $y = mx$.
- **Circunferencia:** $x^2 + y^2 = r^2$. El radio es la **raíz** del número de la derecha.
- **Cortes:** igualar las dos ecuaciones y resolver.
- **Región:** probar un punto para saber qué lado es.