



Qué vas a aprender.

A resolver las **ecuaciones** que aparecen al anular una derivada, los **sistemas** de dos ecuaciones y las **inecuaciones** con las que se calcula un dominio.

⚠ Lee esto antes de empezar.

De este tema **no hay preguntas directas** en el examen. Sin embargo, es la base imprescindible para resolver las que sí entran.

🌐 Mapa del bloque

🌐 Para qué sirve cada apartado

#	Apartado	Lo vas a usar sobre todo en...
1	Ecuaciones de primer y segundo grado	todos los temas
2	Grado superior · bicuadradas	T8 (puntos críticos)
3	Racionales y con radicales	T2 (dominios) · T8
4	Exponenciales y logarítmicas	T4 a T7
5	Sistemas de dos ecuaciones	T8 y T9 (optimización)
6	Inecuaciones de primer grado	T2 y T3 (dominios)
7	Inecuaciones de segundo grado	T2 y T3 (dominios)

💡 **Idea clave.** Resolver una ecuación es **despejar la incógnita** paso a paso, haciendo lo mismo en los dos miembros. Una inecuación se resuelve igual, con una sola precaución: los números negativos.

1 Ecuaciones de primer y segundo grado

Qué es

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen incógnitas. Su **solución** es cualquier valor de la incógnita que, al sustituirlo, da una igualdad verdadera.

Grado uno, $ax = b$: si $a \neq 0$ tiene una sola solución, $x = \frac{b}{a}$.

Segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$: las soluciones vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuaciones incompletas: se resuelven sin la fórmula.

- Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$: se despeja x^2 y se hace la raíz, con los dos signos: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: se saca factor común, $x(ax + b) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$.

Un producto vale 0 cuando **alguno** de sus factores vale 0.

Ejemplo resuelto

Resuelve $x^2 - 4 = 0$.

Paso 1 · falta el término en x . Despejo x^2 y hago la raíz con los dos signos:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

Ejemplo resuelto

Resuelve $x^2 - x = 0$.

Paso 1 · falta el término independiente. Saco factor común: $x(x - 1) = 0$.

Paso 2 · el producto es 0 si $x = 0$ o si $x - 1 = 0$:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

✓ EN RESUMEN

Una raíz cuadrada da **dos** soluciones, $\pm$. Nunca se divide entre x : se saca factor común.

2 Ecuaciones de grado superior · bicuadradas

Qué es

En una **ecuación polinómica de grado superior a dos**, las soluciones coinciden con las raíces del polinomio. Para resolverla se **factoriza** el polinomio (factor común, Ruffini) y se iguala a 0 cada factor.

Las **ecuaciones bicuadradas** son de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Se resuelven con el cambio de variable $z = x^2$, que las transforma en una ecuación de segundo grado en z . Después se deshace el cambio: $x = \pm\sqrt{z}$, solo para los valores de z que no sean negativos.

Ejemplo resuelto

Resuelve $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Paso 1 · hago el cambio $z = x^2$. La ecuación se transforma en:

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Paso 2 · la resuelvo con la fórmula:

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow z_1 = 1, \quad z_2 = 4$$

Paso 3 · deshago el cambio, $x = \pm\sqrt{z}$:

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Cuatro soluciones: $-2, -1, 1$ y 2 .

✓ EN RESUMEN

Bicuadrada: cambio $z = x^2$, ecuación de segundo grado y deshacer el cambio con $\pm\sqrt{z}$.

3 Ecuaciones racionales y con radicales

Racionales

Son ecuaciones en cuyos términos aparecen **fracciones**. Se reducen todas las fracciones a **común denominador**; con el mismo denominador en los dos miembros, se igualan los numeradores.

Con radicales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece bajo el signo radical.

1. Se **aísla** el radical en un miembro de la ecuación.
2. Se **elevan al cuadrado** los dos miembros: la raíz y el cuadrado se anulan, $(\sqrt{A})^2 = A$.
3. Se resuelve la ecuación que queda.
4. Se **comprueban** todas las soluciones en la ecuación inicial: al elevar al cuadrado se pueden obtener soluciones falsas.

Ejemplo resuelto

Resuelve $\frac{3-4x}{5} - \frac{3x-5}{10} - \frac{2-3x}{2} = \frac{9}{10}$.

Paso 1 · el denominador común de 5, 10 y 2 es 10. Multiplico arriba y abajo la primera fracción por 2 y la tercera por 5:

$$\frac{2 \cdot (3-4x)}{10} - \frac{3x-5}{10} - \frac{5 \cdot (2-3x)}{10} = \frac{9}{10}$$

Paso 2 · todos los denominadores son iguales: igualo los numeradores.

$$2 \cdot (3-4x) - (3x-5) - 5 \cdot (2-3x) = 9$$

Paso 3 · quito los paréntesis. Un signo menos delante cambia el signo de todo lo de dentro:

$$6 - 8x - 3x + 5 - 10 + 15x = 9$$

Paso 4 · junto los términos con x y los números: $-8x - 3x + 15x = 4x$ y $6 + 5 - 10 = 1$.

$$4x + 1 = 9$$

Paso 5 · paso el 1 restando y el 4 dividiendo:

$$4x = 9 - 1 = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

 Ejemplo resuelto

Resuelve $x + \sqrt{2x^2 + 2x - 3} = -1$.

Paso 1 · aísla el radical: paso la x al otro miembro, restando.

$$\sqrt{2x^2 + 2x - 3} = -1 - x$$

Paso 2 · elevo al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\sqrt{2x^2 + 2x - 3}\right)^2 = (-1 - x)^2$$

Paso 3 · a la izquierda, la raíz y el cuadrado se anulan. A la derecha, desarrollo el cuadrado:

$$\begin{aligned} (-1 - x)^2 &= (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-x) + (-x)^2 = 1 + 2x + x^2 \\ 2x^2 + 2x - 3 &= 1 + 2x + x^2 \end{aligned}$$

Paso 4 · paso todo al primer miembro y junto los términos del mismo grado:

$$2x^2 - x^2 + 2x - 2x - 3 - 1 = 0 \implies x^2 - 4 = 0$$

Paso 5 · resuelvo: $x^2 = 4$, así que $x = 2$ o $x = -2$.

Paso 6 · **compruebo** cada una en la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} x = 2 : \quad & 2 + \sqrt{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 3} = 2 + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \neq -1 \quad (\text{no vale}) \\ x = -2 : \quad & -2 + \sqrt{2 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) - 3} = -2 + \sqrt{1} = -2 + 1 = -1 \quad (\text{vale}) \end{aligned}$$

$$\boxed{x = -2}$$

 EN RESUMEN

Racionales: común denominador e igualar numeradores. Con radicales: aislar, elevar al cuadrado y **comprobar siempre** las soluciones.

4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Exponenciales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece en el **exponente**. Para bajar la incógnita del exponente se toman **logaritmos neperianos** en los dos miembros:

$$e^x = k \Rightarrow \ln(e^x) = \ln k \Rightarrow x = \ln k \quad (k > 0)$$

porque el logaritmo neperiano deshace la exponencial: $\ln(e^x) = x$.

Si en los dos miembros queda la **misma base**, se igualan los exponentes: $a^x = a^k \Rightarrow x = k$.

Logarítmicas

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece dentro de un **logaritmo**. Para sacarla se pone cada miembro como exponente de e :

$$\ln x = k \Rightarrow e^{\ln x} = e^k \Rightarrow x = e^k$$

porque la exponencial deshace el logaritmo: $e^{\ln x} = x$. Al final hay que comprobar que lo de dentro del logaritmo es **positivo**.

Ejemplo resuelto

Resuelve $e^{2x} = 5$.

Paso 1 · tomo logaritmos neperianos en los dos miembros:

$$\ln(e^{2x}) = \ln 5$$

Paso 2 · a la izquierda, el logaritmo deshace la exponencial y queda el exponente:

$$2x = \ln 5$$

Paso 3 · paso el 2 dividiendo:

$$x = \frac{\ln 5}{2}$$

 Ejemplo resuelto

Resuelve $\ln(x - 1) = 2$.

Paso 1 · pongo cada miembro como exponente de e :

$$e^{\ln(x-1)} = e^2$$

Paso 2 · a la izquierda, la exponencial deshace el logaritmo y queda lo de dentro:

$$x - 1 = e^2$$

Paso 3 · paso el 1 sumando:

$$x = e^2 + 1$$

Paso 4 · compruebo que lo de dentro del logaritmo es positivo: $x - 1 = e^2 > 0$. Vale.

✓ EN RESUMEN

Incógnita en el exponente: se toman logaritmos. Incógnita dentro de un logaritmo: se pone como exponente de e .

5 Sistemas de dos ecuaciones

Qué es

Un **sistema** es un conjunto de ecuaciones que se tienen que cumplir a la vez. Su solución son los valores de x e y que verifican **todas** las ecuaciones. Hay tres métodos, y los tres dan la misma solución:

- **Sustitución:** se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en la otra.
- **Igualación:** se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan las dos expresiones.
- **Reducción:** se suman o se restan las ecuaciones para que desaparezca una incógnita.

Ejemplo resuelto

Resuelve por sustitución el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Paso 1 · despejo y en la primera ecuación:

$$y = 5 - x$$

Paso 2 · sustituyo esa y en la segunda ecuación y resuelvo:

$$2x - (5 - x) = 4 \Rightarrow 2x - 5 + x = 4 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Paso 3 · con $x = 3$, vuelvo a $y = 5 - x$:

$$y = 5 - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 3, \quad y = 2}$$

 Ejemplo resuelto

Resuelve por igualación el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Paso 1 · despejo y en las dos ecuaciones:

$$y = 5 - x \qquad y = 2x - 4$$

Paso 2 · las dos expresiones valen y : las igualo y resuelvo.

$$5 - x = 2x - 4 \Rightarrow 5 + 4 = 2x + x \Rightarrow 9 = 3x \Rightarrow x = 3$$

Paso 3 · con $x = 3$, en $y = 5 - x$:

$$y = 5 - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 3, \quad y = 2}$$

 Ejemplo resuelto

Resuelve por reducción el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Paso 1 · en una ecuación hay $+y$ y en la otra $-y$. Si las sumo, la y desaparece:

$$(x + y) + (2x - y) = 5 + 4 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Paso 2 · sustituyo $x = 3$ en la primera ecuación:

$$3 + y = 5 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \boxed{x = 3, \quad y = 2}$$

 EN RESUMEN

Los tres métodos llevan a la misma solución. Se elige el más cómodo: reducción, si una incógnita se va al sumar; sustitución, si una ya está casi despejada.

6 Inecuaciones de primer grado

Qué es

Una **inecuación** es una desigualdad ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) con una incógnita. Su solución no es un número, sino un **intervalo**: todos los valores que la cumplen.

Se resuelve igual que una ecuación, **pasando términos** de un miembro a otro:

- Lo que está **sumando** pasa **restando**, y al revés. La desigualdad no cambia.
- Lo que está **multiplicando** pasa **dividiendo**, y al revés. Si el número es **positivo**, la desigualdad no cambia.
- Si se multiplica o se divide por un número **negativo**, la desigualdad **se da la vuelta**: $<$ pasa a $>$, y $\leq$ pasa a $\geq$.

Por ejemplo, $2 < 5$ es cierto; al multiplicar por -1 queda $-2 > -5$, y ahora $-2 > -5$.

Ejemplo resuelto

Resuelve $2x - 5 < 3$.

Paso 1 · el 5 está restando: pasa al otro miembro sumando.

$$2x < 3 + 5 \Rightarrow 2x < 8$$

Paso 2 · el 2 está multiplicando: pasa dividiendo. Es positivo, así que la desigualdad no cambia.

$$x < \frac{8}{2} \Rightarrow x < 4, \text{ es decir, } x \in (-\infty, 4)$$

 Ejemplo resuelto

Resuelve $-3x + 1 \leq 7$.

Paso 1 · el 1 está sumando: pasa al otro miembro restando.

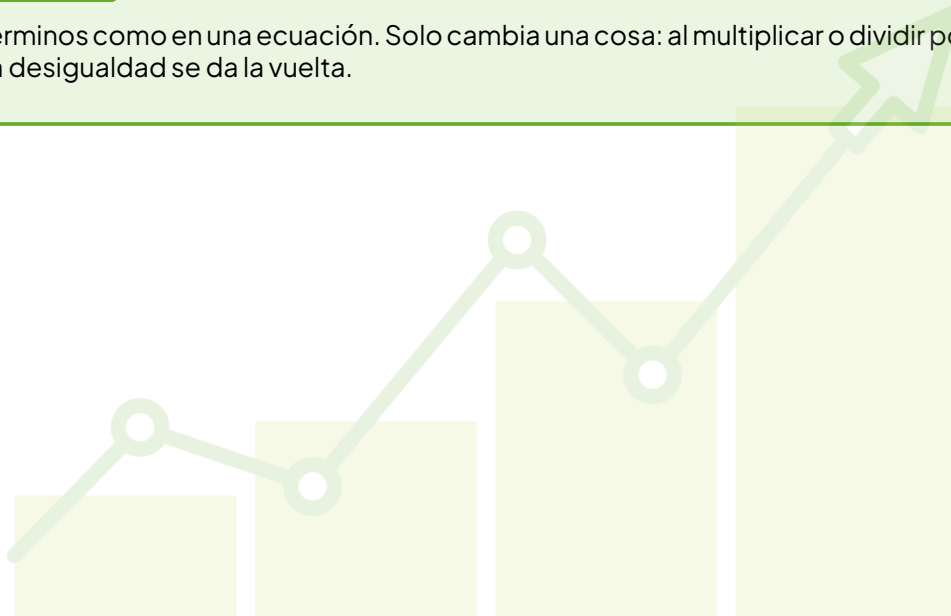
$$-3x \leq 7 - 1 \Rightarrow -3x \leq 6$$

Paso 2 · el -3 está multiplicando: pasa dividiendo. Es **negativo**, así que la desigualdad se da la vuelta:

$$x \geq \frac{6}{-3} \Rightarrow \boxed{x \geq -2, \text{ es decir, } x \in [-2, +\infty)}$$

 EN RESUMEN

Se pasan términos como en una ecuación. Solo cambia una cosa: al multiplicar o dividir por un número negativo, la desigualdad se da la vuelta.



7 Inecuaciones de segundo grado

Cómo se trabaja

Son de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ (o con $<, >, \geq$). Aquí no sirve pasar términos: hay que estudiar el **signo** del polinomio.

1. Se hallan las **raíces** del polinomio.
2. Las raíces dividen la recta en intervalos. En cada uno se prueba **un punto** para ver el signo.
3. Se eligen los intervalos que cumplen la desigualdad. Con $\leq$ o $\geq$, las raíces entran en la solución; con $<$ o $>$, no.

Ejemplo resuelto

Resuelve $x^2 - 4 \leq 0$.

Paso 1 · hallo las raíces: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ y $x = -2$.

Paso 2 · estudio el signo de $x^2 - 4$ en cada intervalo, probando un punto:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
punto de prueba	$x = -3$	$x = 0$	$x = 3$
valor de $x^2 - 4$	$9 - 4 = 5$	$0 - 4 = -4$	$9 - 4 = 5$
signo	+	-	+

Paso 3 · busco donde es menor o igual que 0: es negativo entre las raíces y, con $\leq$, las raíces entran.

$$x \in [-2, 2]$$

✓ EN RESUMEN

En segundo grado: raíces, un punto de prueba en cada intervalo y elegir los que cumplen la desigualdad.

✓ Lo que no te puedes olvidar

Los errores que más se repiten

Está mal

⚠ $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

⚠ $x^2 = x \Rightarrow x = 1$ (dividir entre x)

⚠ $-(3x - 5) = -3x - 5$

⚠ $-2x < 6 \Rightarrow x < -3$

⚠ no comprobar una ecuación con raíces

Lo correcto

$x = 2 \text{ o } x = -2$

$x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 1$

$-(3x - 5) = -3x + 5$

$x > -3$ (la desigualdad se da la vuelta)

comprobar siempre en la ecuación inicial

✓ EN RESUMEN

Antes de pasar al bloque de geometría:

- **Ecuaciones:** lo mismo en los dos miembros. Una raíz cuadrada da dos soluciones, $\pm$.
- **Con raíces:** aislar, elevar al cuadrado y comprobar.
- **Sistemas:** sustitución, igualación o reducción; los tres dan lo mismo.
- **Inecuaciones:** dividir por un número negativo da la vuelta a la desigualdad.