



Qué vas a aprender.

Qué es una función y cuáles son las **funciones básicas** que vas a usar en toda la asignatura: lineal, cuadrática, valor absoluto, exponencial, logarítmica y trigonométricas. También a calcular el **dominio** (los valores de x para los que la función existe) y a usar la **regla de Ruffini** para factorizar polinomios.

⚠ Lee esto antes de empezar.

De este tema **no hay preguntas directas en el examen**. Sin embargo, es la **base imprescindible** para los temas siguientes (límites, derivadas, optimización e integrales). Si no dominas esta parte, los demás temas no se entienden.

Mapa del tema

Para qué sirve cada apartado

#	Apartado	Lo vas a usar sobre todo en...
1	¿Qué es una función?	Toda la asignatura
2	Función lineal $y = mx + b$	T4 (límites) · T6 (derivadas)
3	Función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$	T8 (optimización) · T10 (integrales)
4	Función valor absoluto $ x $	T5 (continuidad)
5	Función exponencial a^x, e^x	T6–T7 (derivadas) · T10 (integrales)
6	Función logarítmica $\ln x, \log_a x$	T6–T7 (derivadas) · T10 (integrales)
7	Funciones trigonométricas $\sin, \cos, \tan$	T6–T7 (derivadas) · T10 (integrales)
8	Dominio de funciones	T4–T5 (límites y continuidad)
9	Método de Ruffini (factorización)	T4 (indeterminaciones) · T10 (integrales racionales)

💡 **Idea clave.** Una función es una regla que convierte un número x en otro número $f(x)$. Casi todo lo que estudiarás en los temas siguientes consiste en **analizar cómo se comporta** esa regla: dónde está definida (dominio), hacia dónde va (límites), cómo cambia (derivadas), dónde alcanza su máximo o mínimo (optimización) y cómo se acumula (integrales).

1 ¿Qué es una función?

✦ Qué es

Una **función** f de un conjunto A en otro B es una relación que cumple dos condiciones:

$$f: A \longrightarrow B \quad / \quad y = f(x) \quad x \in A \quad y = f(x) \stackrel{\text{exist}}{=} \text{unicidad}$$

1. Todo elemento del conjunto de partida A tiene imagen; es decir, el **dominio** de la función es A ($Df \subseteq A$).
2. La imagen de cada elemento $x \in A$ es **única**: ningún elemento del dominio tiene más de una imagen. El conjunto de los elementos de B que son imagen de algún elemento del dominio es el **conjunto imagen** o **recorrido** de f , If .

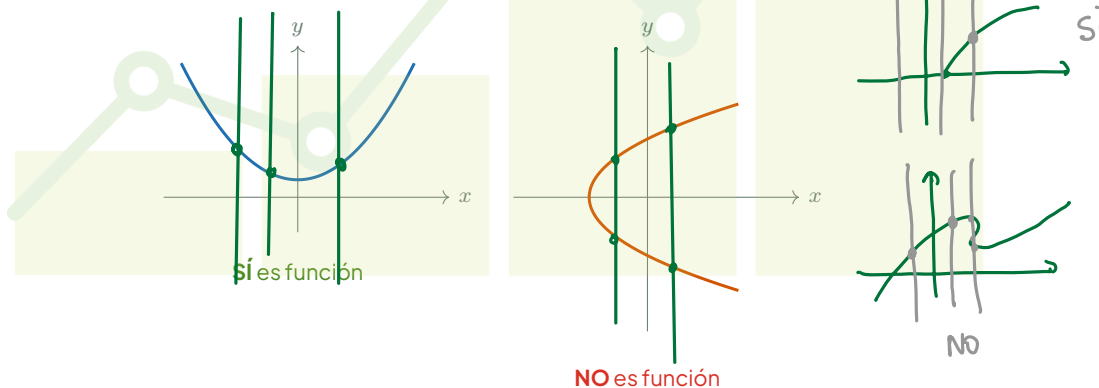
La función es **real** si $B \subseteq \mathbb{R}$ y **de variable real** si su dominio es un conjunto de números reales ($A \subseteq \mathbb{R}$). En ella, x es la **variable independiente** o argumento e y la **variable dependiente**. $f(x) = x + 1$ $f(2) = 2 + 1$

La **gráfica** de una función real de variable real es el conjunto de puntos del plano de coordenadas $(x, f(x))$, con $x \in A$.

Para entenderlo: una función es una regla que convierte cada número x (la entrada) en **un único** número $f(x)$ (la salida). El dominio son las entradas válidas; el recorrido, las salidas que se alcanzan.

✦ Cómo se ve

En una función, cada valor de x tiene **una única** imagen $f(x)$. Esto se traduce visualmente en lo siguiente: si trazamos **paralelas al eje y** , no pueden cortar a la gráfica en **más de un punto** (si lo hicieran, un mismo x tendría varios y asociados).



✦ Cómo se trabaja

1. **Calcular $f(a)$** : sustituye la variable x por el valor a en la fórmula de f . $f(x) = x^2$ $f(1) = 1^2 = 1$
2. **Calcular el dominio**: pregunta en qué valores de x se puede evaluar la fórmula (consulta las tres reglas del apartado 8).
3. **Representar la gráfica**: construye una tabla de valores $(x, f(x))$ y une los puntos obtenidos.

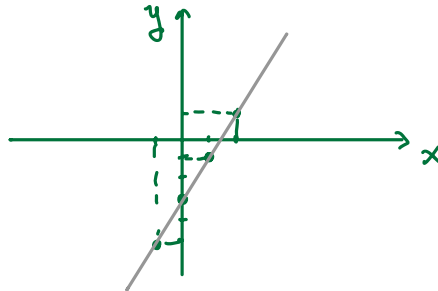
Ejemplo resuelto

Sea $f(x) = 2x - 3$. Calcula $f(5)$ y determina el dominio.

$$f(5) = 2.5 - 3 = 10 - 3 = 7 \rightarrow \text{la imagen del 5 } (f(5) = 7)$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}$$

x	y
0	-3
1	-1
-1	-5
2	1



 NOTAS

DOMINIO $\text{Dom} f \subseteq A$
entradas válidas

$$f: A \longrightarrow B$$

RECORRIDO $\text{Im } f \subseteq B$
salidas alcanzadas

CRITERIO VISUAL $\Rightarrow$ 

Puede ser que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x) = x^2 \quad f(2) = 4$$
$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

No puede ser $f(a) \Rightarrow$ Tenga mas de 1 salida. $\Rightarrow f(a) = p$ y $f(a) = q$ $\forall \forall_0$

✓ EN RESUMEN

Una función asigna a cada x **una única** imagen $f(x)$. El **dominio** son los x válidos; el **recorrido**, los y alcanzados.

2 Función lineal $y = mx + b$

✦ Qué es

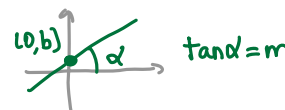
La **función lineal** está dada por la fórmula

$$y = mx + b$$

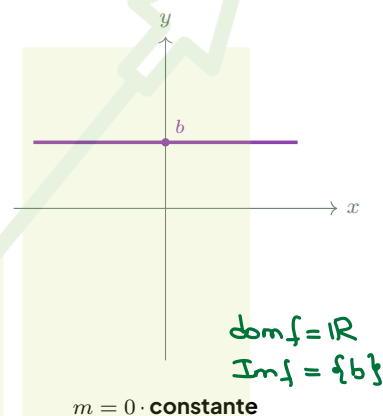
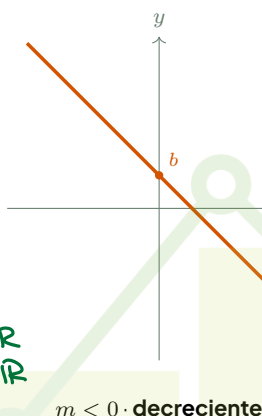
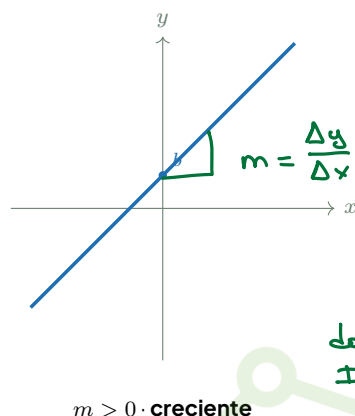
donde m y b son números reales llamados **pendiente** y **ordenada al origen**, respectivamente. Su gráfica es una **recta**.

- La pendiente es la tangente del ángulo α que forma la recta con el eje x : $m = \operatorname{tg} \alpha$. Mide la inclinación de la recta.
- La ordenada al origen b es el valor de y cuando $x = 0$: la recta corta al eje y en el punto $(0, b)$.
- Si $m = 0$, queda $y = b$: es la **función constante**, cuya gráfica es una recta paralela al eje x .

$D_f = \mathbb{R}$ e $I_f = \mathbb{R}$ (salvo si $m = 0$, en cuyo caso $I_f = \{b\}$).



✧ Cómo se ve · según el signo de m



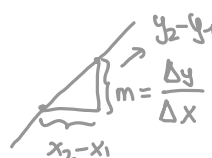
🕒 Cómo se trabaja

A · Si conoces m y b : la recta es directamente $y = mx + b$. Para dibujarla, marca el punto $(0, b)$ y aplica la pendiente: por cada unidad que avanzas en el eje x , subes (o bajas) m unidades en y .

B · Si conoces dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

1. Calcula la pendiente con el cociente de incrementos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$$y = 2x + 3$$

$$\begin{aligned} &A(1, -3) \\ &B(2, -4) \\ &m = \frac{-4 - (-3)}{2 - 1} = -1 \\ &y = -1x + b \\ &-3 = -1 \cdot 1 + b \quad b = -2 \\ &y = -x - 2 \end{aligned}$$

2. Sustituye m y las coordenadas de uno de los puntos en $y = mx + b$ y despeja b .

C · Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje y : evalúa en $x = 0$. Resultado: $(0, b)$.
- Con el eje x : resuelve $y = 0$. Resultado: $x = -\frac{b}{m}$ (cuando $m \neq 0$).

Ejemplo resuelto

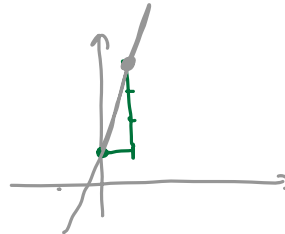
Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(1, 4)$ y $P_2(3, 10)$.

① Pendiente: $m = \frac{10-4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$ ✓

② $y = 3x + b$

③ Sust: $P_1(1, 4)$ $4 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1$

$y = 3x + 1$



NOTAS

$m > 0$ ↗

$m < 0$ ↘

$m = 0$ —

$m_1 = m_2$



Rectas paralelas

$x = k$



NO FUNCIÓN

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$



1) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2) $b \rightarrow$ sust.

$m_1 \cdot m_2 = -1$



rectas perpendiculares

ejemplo: $y = 2x - 1$
 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ } $2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$

✓ EN RESUMEN

En $y = mx + b$, la pendiente m marca la inclinación y la ordenada al origen b marca el corte con el eje y .

Con dos puntos, primero $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y después b por sustitución.

3 Función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$

Qué es

La **función cuadrática** responde a la fórmula

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

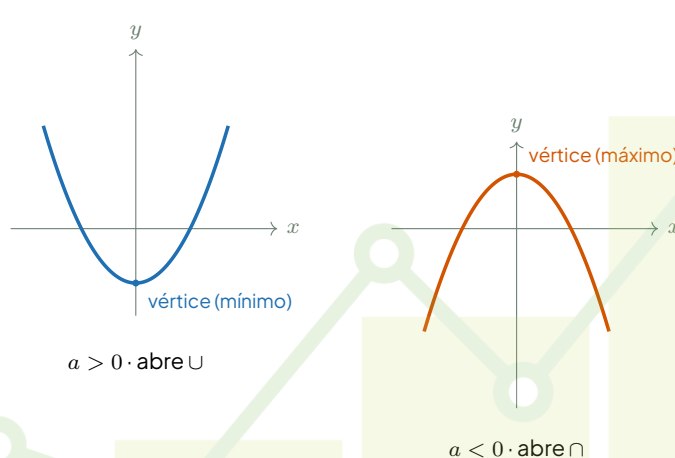


Su gráfica es una curva llamada **parábola**. El signo del coeficiente a determina su forma:

- Si $a > 0$, la función es **cóncava** (tiene forma de $\cup$) y admite un **mínimo**. $a > 0 \cup$ $a < 0 \cap$
- Si $a < 0$, la función es **convexa** (tiene forma de $\cap$) y admite un **máximo**.

El **vértice** es el punto de la curva donde la función alcanza el mínimo o el máximo. La recta $x = x_v$ es el **eje de simetría**.

Cómo se ve



Cómo se trabaja

Para estudiar una parábola calcula tres elementos:

1. **Orientación:** mira el signo de a (abre $\cup$ si $a > 0$; abre $\cap$ si $a < 0$).
2. **Vértice** $V(x_v, y_v)$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac \text{ (discriminante)}$$

3. **Puntos de corte con los ejes:**

- Con el eje y : evalúa en $x = 0$. Resultado: $(0, c)$.
- Con el eje x : resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con la fórmula general

$$\hookrightarrow y = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \Delta$$

$$y = 2x^2$$

$$y = 4x^2$$

$$\Delta > 0$$

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = 0$$

Si $\Delta > 0$, hay dos raíces reales distintas (**2 cortes**); si $\Delta = 0$, una raíz doble (**1 corte**: el eje x es tangente a la parábola); si $\Delta < 0$, las raíces son complejas (**ningún corte**).

Ejemplo resuelto

Estudia la parábola $y = x^2 - 6x + 5$. $a = 1$ $b = -6$ $c = 5$

① $a = 1 > 0$ $\cup$

② Vértice : $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

Vértice $(3, -4)$

$y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

③ Eje simetría $\Rightarrow x = 3$ simet.

④ Puntos de corte

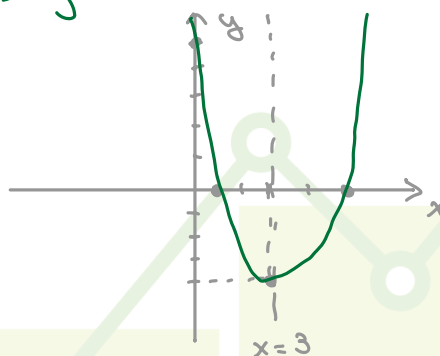
Eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 6x + 5$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$

$(5, 0)$ y $(1, 0)$

Eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$

$(0, 5)$



NOTAS

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow$

$\Delta > 0$	$\cup$	$\cap$
$\Delta < 0$	$\cup$	$\cap$
$\Delta = 0$	$\cup$	$\cap$
	$a > 0$	$a < 0$

$x^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{matrix}$

$a > 0 \cup$ mínimo $a < 0 \cap$ máximo.

$\rightarrow y = (x - x_1)(x - x_2)$

✓ EN RESUMEN

Una parábola $y = ax^2 + bx + c$ queda determinada por el signo de a (orientación), por su vértice $V(-\frac{b}{2a}, f(x_v))$ y por sus cortes con los ejes. El número de cortes con el eje x depende del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

4 Función valor absoluto $|x|$

Qué es

La **función módulo** o **valor absoluto** está definida por:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|2| = 2 \quad |-2| = +2$$

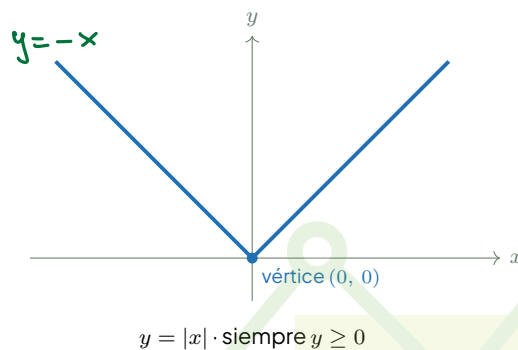
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto |x|$$

Su dominio es $D_f = \mathbb{R}$ y su imagen $I_f = [0, +\infty)$.

El valor absoluto de un número real representa la **distancia** de ese número **al origen** en la recta real; como mide una distancia, nunca es negativo. Ejemplos: $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$.

Cómo se ve · forma de «V»



Cómo se trabaja · expresar sin valor absoluto

Para **escribir una expresión con valor absoluto $|A(x)|$ como función a trozos**:

1. Resuelve la ecuación $A(x) = 0$. Las soluciones dividen la recta real en tramos.
2. En cada tramo, analiza el signo de $A(x)$:
 - si $A(x) \geq 0$ en el tramo, entonces $|A(x)| = A(x)$ (se mantiene igual);
 - si $A(x) < 0$ en el tramo, entonces $|A(x)| = -A(x)$ (se cambia el signo de toda la expresión).

Ejemplo resuelto

Expresa $f(x) = |x - 3|$ como función a trozos.

① $A(x) = x - 3$

$A(x) = 0 \Rightarrow x = 3$

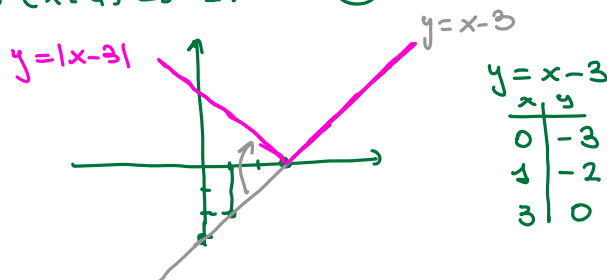
$$\begin{array}{c} \hline x < 3 & 3 & x \geq 3 \\ \hline \end{array}$$

② Signo $x - 3$

$x < 3$ ($x=0$) $\Rightarrow 0 - 3 < 0 \Rightarrow \ominus$

$x > 3$ ($x=4$) $\Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow \oplus$

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \geq 3 \\ -x + 3 & x < 3 \end{cases}$$



NOTAS

$|a| = a \quad a \geq 0$

$|a| = -a \quad a < 0$

$|x-3| \neq x-3$ en general

$|x-a| \rightarrow$ distancia de x a " a "

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Continua
No será derivable.

✓ EN RESUMEN

$|x|$ es la distancia al origen; nunca es negativa. Para **expresar sin barras** una función $|A(x)|$, resuelve $A(x) = 0$, estudia el signo de $A(x)$ en cada tramo y escribe la función **por tramos**.

5 Función exponencial a^x

Qué es

La **función exponencial** es de la forma

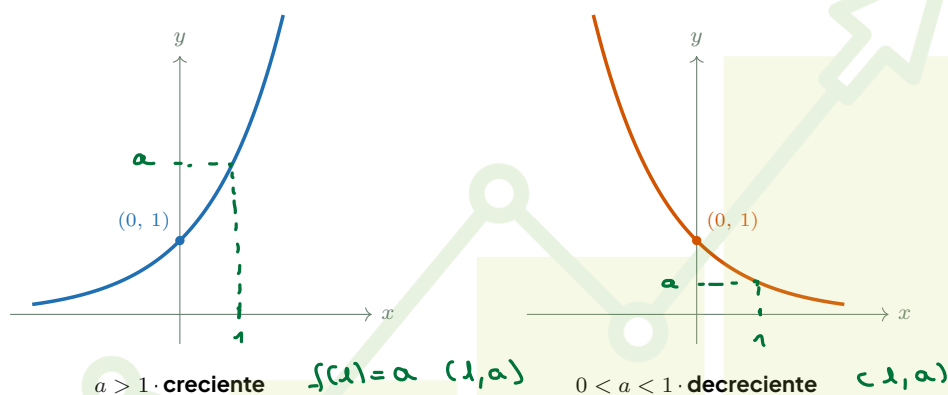
$$y = a^x \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1 \quad a^x > 0$$

La variable x aparece en el **exponente**, y la base a es una constante positiva distinta de 1. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ el valor a^x está definido y es **estrictamente positivo**.

La exponencial más utilizada en cálculo es la de base $e \approx 2,71828 \dots$ (número de Euler), es decir, $y = e^x$. Aparece en todos los temas siguientes: derivadas, integrales, modelos de crecimiento y capitalización continua.

En ambos casos ($a > 1$ y $0 < a < 1$): $D_f = \mathbb{R}$ e $I_f = (0, +\infty)$.

Cómo se ve · según la base a



En los dos casos $f(0) = 1$ y $f(1) = a$, y la función **no tiene ceros** (nunca corta al eje x). Es **asintótica al semieje negativo de abscisas** si $a > 1$ y **al semieje positivo** si $0 < a < 1$: se acerca al eje x sin llegar a tocarlo ($y = 0$ es asíntota horizontal).

Cómo se trabaja · resolver $a^x = k$

Como a^x es siempre positivo, la ecuación solo tiene solución si $k > 0$. En ese caso:

1. Si k se puede escribir como una **potencia de la misma base a** ($k = a^p$), iguala los exponentes: $x = p$.
2. En caso contrario, aplica logaritmos a ambos lados y despeja x (ver apartado 6).

$$2^x = -3 \quad \nexists$$

$$2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

$$2^x = 3 \Rightarrow \log 2^{\otimes} = \log 3$$

$$x \cdot \log 2 = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Ejemplo resuelto

Resuelve la ecuación $2^x = \underline{32}$.

$$\begin{aligned} 2^x &= 2^5 \\ \Downarrow \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^x &= 10 \\ \ln 2^x &= \ln 10 \\ x \cdot \ln 2 &= \ln 10 \\ x &= \frac{\ln 10}{\ln 2} \simeq 3,32 \end{aligned}$$

$$2^x = -4 \quad \text{No solución}$$

NOTAS

$a^x > 0$ Siempre $\oplus$
 Siempre pasa $(0, 1)$
 Asint horizontal $y = 0$

$a > 1$ crece 

$0 < a < 1$ decrece 

$y = e^x \quad e \simeq 2,71828\dots$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
 $a^x : a^y = a^{x-y}$
 $(a^x)^y = a^{xy}$
 $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\text{dom } f = \mathbb{R}$
 $\text{Im } f = (0, +\infty)$

✓ EN RESUMEN

$y = a^x$ está definida en todo $\mathbb{R}$ y toma valores en $(0, +\infty)$. Pasa por $(0, 1)$ y nunca es cero ni negativa. Si $a > 1$ es creciente; si $0 < a < 1$, decreciente. La exponencial de referencia es e^x .

6 Función logarítmica $\log_a x$

📌 Qué es · definición de logaritmo

Dados $a > 0, a \neq 1$ y $b > 0$, se define:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

$\log_2 16 = 4 \iff 2^4 = 16$

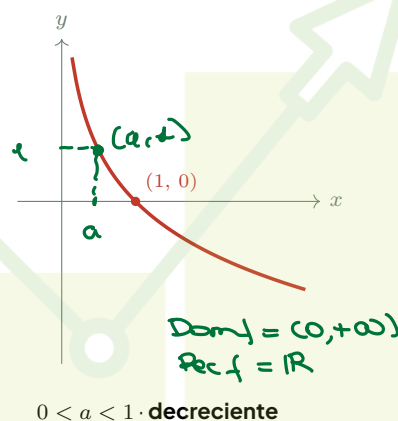
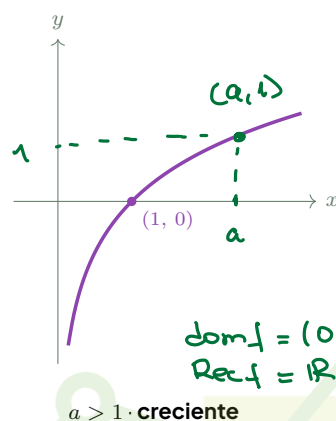
exp → 4

Es decir, el logaritmo en base a de un número positivo b es el **exponente** c al que debe elevarse la base a para obtener b . El logaritmo es la operación inversa de la potenciación.

La **función logarítmica** es $y = \log_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Su dominio e imagen son $D_f = (0, +\infty)$ e $I_f = \mathbb{R}$.

- Si $a = 10$, $y = \log x$: logaritmo **decimal**.
- Si $a = e$, $y = \ln x$: logaritmo **neperiano** o natural. Es el más usado en cálculo.

📈 Cómo se ve · según la base a



En los dos casos $f(1) = 0$ y $f(a) = 1$, y la curva nunca cruza el eje y ($x = 0$ es asíntota vertical): es **asintótica al semieje negativo de ordenadas** si $a > 1$ y **al semieje positivo** si $0 < a < 1$. Para $x \in (0, 1)$, el logaritmo es negativo si $a > 1$ y positivo si $0 < a < 1$.

📋 Propiedades de los logaritmos

Para $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$ y $n \in \mathbb{R}$:

$$\log_a 1 = 0 \Rightarrow a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1 \Rightarrow a^1 = a$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a (b^n) = n \log_a b$$

$$a^{\log_a b} = b \rightarrow$$

$$\log_a (a^x) = x \rightarrow$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \text{ (cambio de base) } = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log_3 b}{\log_3 a}$$

$\log_2 8 = 3$

$2^{\log_2 3} = 3$

Ejemplo resuelto

Resuelve la ecuación $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$.

① Dominio: $\begin{cases} x > 0 \\ x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

② $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3 \rightsquigarrow \log_a[m] = \log_a[n] \Rightarrow m=n$

$$\ln[x(x-2)] = \ln 3$$

$$\Downarrow$$

$$x(x-2) = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

③ Comprobar con el dominio $\Rightarrow \text{Dom: } x > 2 \Rightarrow x=3$

NOTAS

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_{10} 10 = 1$$

$$\log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

$$\log_a(m+n) \neq \log_a m + \log_a n$$

en ecuaciones

$\rightarrow$ Siempre comprobando

✓ EN RESUMEN

$\log_a b = c$ equivale a $a^c = b$. Solo existe el logaritmo de números **estrictamente positivos**. Las propiedades transforman productos en sumas y potencias en productos; en cambio, el logaritmo de una suma **no** es la suma de los logaritmos. El logaritmo neperiano $\ln$ es el logaritmo en base e .

7 Funciones trigonométricas · sen, cos, tg

Qué es · circunferencia goniométrica

Sea $P(x, y)$ el punto de la circunferencia de centro el origen y radio r correspondiente al ángulo α . Las **funciones trigonométricas** o **circulares** asignan a cada número real las razones trigonométricas del ángulo de esa medida en radianes:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

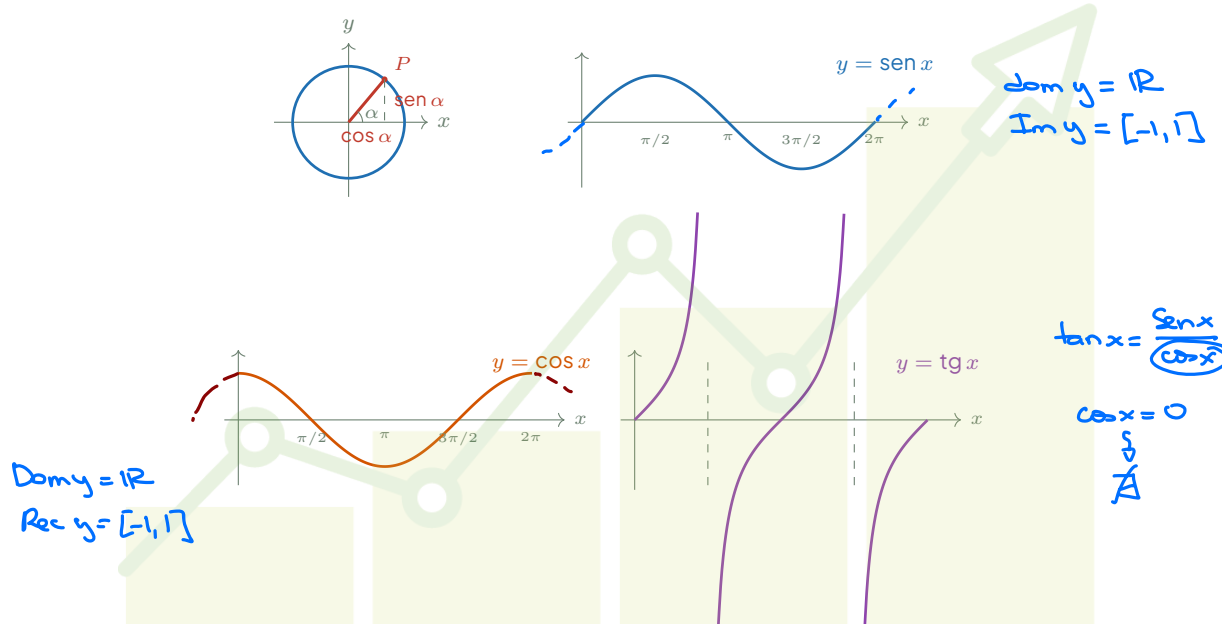


Con la circunferencia de **radio 1**: $\operatorname{sen} \alpha$ es la ordenada de P , $\cos \alpha$ es su abscisa y $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha / \cos \alpha$.

Radianes. Un radián es el ángulo central cuyo arco mide lo mismo que el radio: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ y $x_{\text{rad}} = x_{\text{grados}} \cdot \pi/180$. En esta asignatura los ángulos se miden siempre en radianes.



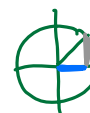
Cómo se ve



Identidad fundamental y valores notables

Identidad fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



Valores en los ángulos que más se repiten:

	0	30°	45°	60°	90°	180°	
α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	radianes
$\operatorname{sen} \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	

Ejemplo resuelto

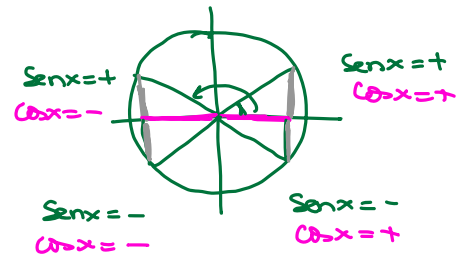
Resuelve la ecuación $\sin x = \frac{1}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



NOTAS

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

CALCULADORA

radianes $\Rightarrow$ (r)

grados $\Rightarrow$ (D)

✓ EN RESUMEN

Una función es **periódica**, de período T , si $f(x + T) = f(x)$ para todo x . $\sin$ y $\cos$ tienen $Df = \mathbb{R}$, $If = [-1, 1]$ y período $T = 2\pi$. La identidad fundamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ es la relación clave. Trabajamos siempre en **radianes**.

8 Dominio de funciones

Qué es

El **dominio** D_f de una función real de variable real dada por una fórmula $y = f(x)$ es el subconjunto de números reales **más amplio posible** para el cual la expresión $f(x)$ tiene sentido y toma valores reales.

Para determinarlo se analizan las **restricciones** que impone la propia expresión:

- los denominadores no pueden ser iguales a cero; $\frac{A}{B} \nexists$
- el radicando de una raíz de índice par no puede ser negativo; $\sqrt[n]{-A}$ o $\sqrt[n]{0}$ si n es par
- el argumento de un logaritmo debe ser estrictamente positivo; $\log x \Rightarrow x > 0$
- las restricciones propias de las funciones trigonométricas u otras (por ejemplo, $\tan x$ no existe donde $\cos x = 0$).

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \neq 0$$

Cómo se trabaja · las tres reglas

Si en $f(x)$ aparece...	tiene que cumplirse...	ejemplo
una fracción $\frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$	$y = \frac{1}{x-2}: x \neq 2$ $x-2=0 \Rightarrow x=2$ $\text{dom } y = \mathbb{R} - \{2\}$
una raíz $\sqrt[n]{A(x)}$ (índice par)	$A(x) \geq 0$	$y = \sqrt{x+1}: x \geq -1$ $x+1 \geq 0$ $x \geq -1$ $\text{dom } y = [-1, +\infty)$
un logaritmo $\ln A(x)$	$A(x) > 0$	$y = \ln(x-5): x > 5$ $x-5 > 0$ $x > 5$ $\text{dom} = (5, \infty)$

Si en la expresión concurren **varias de estas condiciones**, el dominio es su **intersección**: tienen que cumplirse **todas simultáneamente**. Para resolver inecuaciones polinómicas del tipo $A(x) \geq 0$ se utiliza la **tabla de signos**.

Ejemplo resuelto

Calcula el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

① Por ser una raíz índice par $\Rightarrow x^2 - 4 \geq 0$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

+	-	+
-2	2	
(-3) ² -4 ≥ 0	0 ² -4 = -4 < 0	3 ² -4 ≥ 0

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4} \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log(x^2 - 4) \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow \text{Igual o.j.o. (hay que sacar } 2, -2)$$

$$\text{dom } f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

Recordad: Fracción $\rightarrow \text{den} \neq 0$

Raíz (índice par) $\rightarrow \text{radicando} \geq 0$

Logaritmo $\rightarrow \text{argumento} > 0$

✓ EN RESUMEN

Para calcular el dominio imponemos: **denominadores distintos de cero**, **radicandos (índice par) mayores o iguales que cero** y **argumentos de logaritmos estrictamente positivos**. Si concurren varias condiciones, el dominio es su **intersección**.

9 Método de Ruffini

📌 Qué es

La **regla de Ruffini** permite calcular de forma rápida la división de un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x + a)$. Da el cociente $C(x)$ y el resto R , que cumplen $P(x) = (x + a) \cdot C(x) + R$, y es la herramienta habitual para **factorizar polinomios** y **buscar sus raíces**.

Recordatorio: una **función polinómica** de grado n es de la forma

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

Sus **raíces** o ceros son los valores de x que verifican $P(x) = 0$.

$$\begin{array}{r} P(x) \\ R \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x+a \\ C(x) \end{array}$$

📄 Teorema del resto

Dado un polinomio $P(x)$, su valor numérico para $x = -a$ es igual al **resto** de la división de $P(x)$ entre $(x + a)$:

$$R = P(-a)$$

En particular, $P(-a) = 0 \iff (x + a)$ es un factor de $P(x)$. Dicho con la raíz: r es raíz de $P(x) \iff (x - r)$ es un factor.

Consecuencia práctica: para localizar **raíces enteras** de $P(x)$ con coeficientes enteros, basta con **probar los divisores** del término independiente a_0 (los candidatos son $\pm 1, \pm 2, \dots$ dividiendo a_0).

🔧 Cómo se trabaja la regla de Ruffini

Para dividir $P(x)$ entre $(x + a)$:

1. Escribe en una fila los **coeficientes** de $P(x)$ ordenados por grado **decreciente**. Si falta algún grado intermedio, coloca un **0**.
2. A la izquierda, en una columna separada, escribe $-a$: el término independiente del divisor cambiado de signo (es el número que anula el divisor $x + a$).
3. Baja el primer coeficiente tal como está.
4. Multiplica el número bajado por $-a$, suma el resultado al siguiente coeficiente de $P(x)$ y escribe la suma debajo. Repite hasta llegar al último coeficiente.
5. El último número obtenido es el **resto** R . Si $R = 0$, entonces $-a$ es raíz y puedes **factorizar** $P(x) = (x + a) \cdot C(x)$.

Calcular raíces con la calculadora

La calculadora Casio Classwiz (fx-570/991) calcula directamente las **raíces de un polinomio** de grado 2, 3 o 4 con la función **Polynomial**:

MENU → **A: Equation/Func** → **2: Polynomial** → grado → coeficientes → =

Los coeficientes se escriben por grado **decreciente**, cada uno seguido de =; si falta algún grado, su coeficiente es **0**.

Ejemplo: raíces de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Los coeficientes son $a = 1$, $b = -2$, $c = -5$ y $d = 6$. El **círculo verde** marca la tecla que se pulsa en cada pantalla.

1 Pulsa **MENU**

2 Baja con $\blacktriangledown$ hasta el icono **A** y pulsa =

3 Pulsa 2 para entrar en **Polynomial**

4 Pulsa 3: polinomio de grado 3

5 Coeficiente a: pulsa 1 y =

6 Coeficiente b: pulsa (-) 2 y =

7 Coeficiente c: pulsa (-) 5 y =

8 Coeficiente d: pulsa 6 y =

9 Ya están los cuatro. Pulsa = para resolver

10 Primera raíz: $x_1 = -2$
Pulsa = para ver la siguiente

11 Segunda raíz: $x_2 = 3$
Pulsa = para ver la siguiente

12 Tercera raíz: $x_3 = 1$



La calculadora da las tres raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 1$. $\Rightarrow$ Factor: $(x + 2)(x - 3)(x - 1)$

Ejemplo resuelto

Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 - 7x + 6$ **y calcula sus raíces.**

$$y = x^3 - 7x + 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$$

Candidatos $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$
Divisor 6

raíces: $x=1$
 $x=2$
 $x=-3$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Fact: $(x-1)(x-2)(x+3)$

NOTAS

$(x+a)$ divisor $\rightarrow$ Ruffini usamos $-a$

$(x-1)$ divisor $\rightarrow$ se usa 1

Resto 0 $\Rightarrow$ raíz $\Rightarrow$ fact.

Falta un grado en Ruffini $\Rightarrow$ Coef 0

Raíces: Divisores del término independiente) a_0
(enteros) Si nos queda un polinomio de grado 2 $\Rightarrow$ fórmula.

x_1, x_2, x_3 raíces $\Rightarrow$ Fac: $(K)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Las raíces del ejemplo con la calculadora

Calculamos las raíces de $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Sus coeficientes son $a = 1$, $b = 0$ (no hay término en x^2), $c = -7$ y $d = 6$. El **círculo verde** marca la tecla que se pulsa en cada pantalla.

1 Pula **MENU**

2 Baja con ∇ hasta el icono **A** y pulsa **=**

3 Pula 2 para entrar en **Polynomial**

4 Pula 3: polinomio de grado 3

5 Coeficiente **a**: pulsa 1 y **=**

6 Coeficiente **b**: no hay, es 0 pulsa 0 y **=**

7 Coeficiente **c**: pulsa (-) 7 y **=**

8 Coeficiente **d**: pulsa 6 y **=**

9 Ya están los cuatro. Pula **=** para resolver

10 Primera raíz: $x_1 = -3$ Pula **=** para ver la siguiente

11 Segunda raíz: $x_2 = 2$ Pula **=** para ver la siguiente

12 Tercera raíz: $x_3 = 1$

$P(x) = 0$

La calculadora da $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 1$: las mismas raíces que hemos obtenido con Ruffini.

$$P(x) = (x+3)(x-2)(x-1)$$

✓ EN RESUMEN

Ruffini divide $P(x)$ entre $(x + a)$ rápidamente. Si el resto es 0, hemos encontrado una raíz y podemos **factorizar** el polinomio. Para buscar raíces enteras, pruebo los divisores del término independiente.

Cuadro comparativo · las funciones elementales

Un vistazo a todas

Función	Fórmula	Gráfica	Dominio	Puntos clave
Lineal	$y = mx + b$		$\mathbb{R}$	corta eje y en b ; pendiente m
Cuadrática	$y = ax^2 + bx + c$		$\mathbb{R}$	vértice en $x_v = -\frac{b}{2a}$
Valor absoluto	$y = x $		$\mathbb{R}$	$y \geq 0$; forma de «V»
Exponencial	$y = a^x$		$\mathbb{R}$	$y > 0$; pasa por $(0, 1)$
Logarítmica	$y = \log_a x$		$(0, +\infty)$	pasa por $(1, 0)$
Seno	$y = \text{sen } x$		$\mathbb{R}$	$-1 \leq y \leq 1$; periodo 2π
Coseno	$y = \cos x$		$\mathbb{R}$	$-1 \leq y \leq 1$; periodo 2π

→ Para qué te sirve en los temas siguientes

→ Dónde se usa cada contenido

Dominio	T4–T5 · límites y continuidad. Antes de calcular un límite en un punto hay que saber si la función está definida allí.
Lineal y cuadrática	T4 (límites) y T8 (optimización). Las rectas tangentes y las parábolas aparecen al linealizar y al estudiar máximos y mínimos locales.
Valor absoluto	T5 · continuidad. Las funciones con $ \cdot $ son el ejemplo clásico de función continua pero no derivable (en el vértice).
Exponencial y logarítmica	T6–T7 · derivadas: aparecen en casi todos los enunciados (e^{x^2} , $\ln(1+x)$...). T10 · integrales.
Trigonómicas	Se usan poco. T4 · límites: en alguno importa que $\sin$ y $\cos$ están siempre entre -1 y 1 . T6–T7 · derivadas: reglas de $\sin$ y $\cos$.
Ruffini y factorización	T4 · indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ al factorizar numerador y denominador. T10 · integrales de funciones racionales , donde hay que descomponer en fracciones simples y para eso hay que factorizar el denominador.

✓ EN RESUMEN

Lo que no te puedes olvidar antes de pasar al Tema 3:

- **Calcular dominios:** denominadores $\neq 0$, radicandos (índice par) ≥ 0 , argumentos de logaritmos > 0 . Si hay varias condiciones, todas a la vez. Es lo que más vas a usar: en el Tema 3 se hace igual con funciones de dos variables.
- **Factorizar polinomios:** fórmula de la ecuación de segundo grado, Ruffini y teorema del resto. Las raíces enteras se buscan entre los divisores del término independiente.
- **Exponenciales y logaritmos:** e^x es siempre positiva y $\ln x$ solo existe si $x > 0$. $\log(ab) = \log a + \log b$ y $\log(b^n) = n \log b$ (nunca $\log(a+b) = \log a + \log b$).
- **Trigonometría:** basta con recordar que $\sin x$ y $\cos x$ están siempre entre -1 y 1 , y la identidad $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

