



Qué llevarte en la cabeza.

Un vistazo rápido a todo el tema: las definiciones y fórmulas clave de cada función elemental, del dominio y de la regla de Ruffini. Pensado para **repasar antes de un ejercicio**.

! Es la base de todo lo demás.

De este tema **no hay preguntas directas en el examen**. Sin embargo, es la **base imprescindible** para los temas siguientes: límites, derivadas, optimización e integrales.

1 · ¿Qué es una función?

$$f : A \longrightarrow B \quad / \quad y = f(x)$$

Relación de A en B que cumple dos condiciones:

- ▶ todo elemento de A tiene imagen;
- ▶ esa imagen es **única**.

Conceptos

- ▶ **Dominio**, D_f : el conjunto A .
- ▶ **Conjunto imagen** o recorrido, I_f : los elementos de B que son imagen de alguno de A .
- ▶ **Real** si $B \subseteq \mathbb{R}$; **de variable real** si $A \subseteq \mathbb{R}$.
- ▶ **Gráfica**: los puntos $(x, f(x))$. Una paralela al eje y la corta, como mucho, en un punto.

2 · Función lineal · recta

$$y = mx + b$$

- ▶ **Pendiente m** : $m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- ▶ **Ordenada al origen b** : corta al eje y en $(0, b)$.
- ▶ Corta al eje x en $x = -\frac{b}{m}$.
- ▶ $D_f = \mathbb{R}$; $I_f = \mathbb{R}$ (si $m \neq 0$).

Según la pendiente

- ▶ $m > 0$: **creciente**.
- ▶ $m < 0$: **decreciente**.
- ▶ $m = 0$: función **constante**.

Rectas · ecuaciones y posiciones

Recta por $P(x_0, y_0)$ con pendiente m

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Recta por dos puntos

- ▶ Primero la pendiente: $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
- ▶ Después, la fórmula anterior.

Posición de dos rectas

- ▶ **Paralelas**: tienen la misma pendiente.

$$m_r = m_s$$

- ▶ **Perpendiculares**: la pendiente de una es la recíproca cambiada de signo de la otra.

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

3 · Función cuadrática · parábola

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

Forma, según el signo de a

- ▶ $a > 0$: **cóncava** (U). Tiene **mínimo**.
- ▶ $a < 0$: **convexa** (∩). Tiene **máximo**.

Vértice

$$x_v = -\frac{b}{2a}, \quad y_v = f(x_v) = -\frac{\Delta}{4a}$$

- ▶ Eje de simetría: $x = x_v$.
- ▶ Corte con el eje y : $(0, c)$.

Cortes con el eje x

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

- ▶ $\Delta > 0$: dos raíces reales distintas.
- ▶ $\Delta = 0$: una raíz doble.
- ▶ $\Delta < 0$: raíces complejas (no corta).

Otras formas de escribirla

- ▶ Factorizada: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- ▶ Canónica: $y = a(x - x_v)^2 + y_v$

4 · Función módulo o valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- ▶ Es la **distancia** de x al origen.
- ▶ $D_f = \mathbb{R}$; $I_f = [0, +\infty)$.

Desigualdades (para $k > 0$)

- ▶ $|x| < k \iff -k < x < k$
- ▶ $|x| > k \iff x > k \text{ o } x < -k$

Propiedades

- ▶ $|xy| = |x| |y|$
- ▶ $|x + y| \leq |x| + |y|$

Expresar $|A(x)|$ sin valor absoluto

- ▶ Resuelve $A(x) = 0$.
- ▶ Escribe la función **por tramos**, según el signo de $A(x)$ en cada uno.

5 · Función exponencial

$$y = a^x \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

- ▶ $D_f = \mathbb{R}$; $I_f = (0, +\infty)$.
- ▶ $f(0) = 1$ y $f(1) = a$.
- ▶ **No tiene ceros**: $a^x = k$ solo tiene solución si $k > 0$.
- ▶ Asíntota horizontal: $y = 0$.
- ▶ La más usada: $y = e^x$, con $e \approx 2,718 \dots$

Según la base

- ▶ $a > 1$: **creciente**.
- ▶ $0 < a < 1$: **decreciente**.

Propiedades de las potencias

- ▶ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- ▶ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- ▶ $(a^x)^y = a^{xy}$

6 · Función logarítmica

Dados $a > 0, a \neq 1$ y $b > 0$:

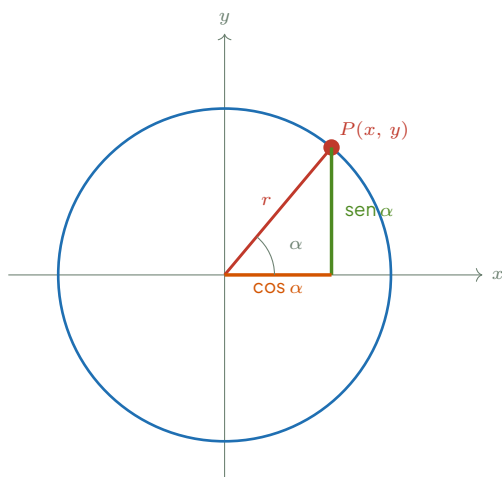
$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

- ▶ Función: $y = \log_a x$.
- ▶ $D_f = (0, +\infty)$; $I_f = \mathbb{R}$.
- ▶ $f(1) = 0$ y $f(a) = 1$.
- ▶ Asíntota vertical: $x = 0$.
- ▶ $a > 1$: **creciente**. $0 < a < 1$: **decreciente**.
- ▶ $\log x$: base 10. $\ln x$: base e (neperiano).

Propiedades

- ▶ $\log_a 1 = 0$
- ▶ $\log_a a = 1$
- ▶ $\log_a a^x = x$
- ▶ $a^{\log_a b} = b$
- ▶ $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
- ▶ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- ▶ $\log_a b^n = n \log_a b$
- ▶ Cambio de base: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

7 · Funciones trigonométricas



Definición

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Con la circunferencia de radio 1

- $\operatorname{sen} \alpha$ es la **ordenada** de P .
- $\cos \alpha$ es la **abscisa** de P .
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

Identidad fundamental

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

8 · Dominio de funciones

El **dominio** D_f es el subconjunto de números reales **más amplio posible** para el cual la expresión $f(x)$ tiene sentido y toma valores reales. Se analizan las restricciones de la propia expresión:

Si en $f(x)$ aparece...	tiene que cumplirse...	ejemplo
un denominador: $\frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$	$\frac{1}{x-2}$: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
una raíz de índice par: $\sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$	$\sqrt{x+1}$: $D_f = [-1, +\infty)$
un logaritmo: $\ln A(x)$	$A(x) > 0$	$\ln(x-5)$: $D_f = (5, +\infty)$
raíz en un denominador: $\frac{1}{\sqrt{A(x)}}$	$A(x) > 0$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$: $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
una tangente: $\operatorname{tg} A(x)$	$\cos A(x) \neq 0$	$\operatorname{tg} x$: no existe donde $\cos x = 0$

- Polinomios, exponenciales, $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $D_f = \mathbb{R}$.
- Si hay **varias condiciones**, el dominio es su **intersección**: tienen que cumplirse todas a la vez.
- Las inecuaciones polinómicas, como $A(x) \geq 0$, se resuelven factorizando y con la **tabla de signos**.

Ejemplo con tabla de signos: dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

- Condición: $x^2 - 4 \geq 0$.
- Factorizo: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Raíces: $x = 2$ y $x = -2$.
- Signo del producto en cada tramo (tabla).
- $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$x - 2$	-	-	+
$x + 2$	-	+	+
$(x - 2)(x + 2)$	+	-	+

9 · Polinomios · teorema del resto y regla de Ruffini

Función polinómica de grado n : $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$.

División: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$, con el grado de R menor que el de Q (o $R = 0$).

Teorema del resto: el resto de dividir $P(x)$ entre $(x + a)$ es

$$R = P(-a)$$

Por tanto, r es **raíz** de $P(x) \iff (x - r)$ es un factor.

Raíces enteras: se buscan entre los divisores del término independiente.

Factorización: $y = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

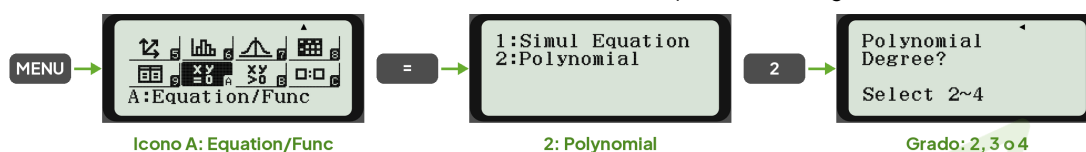
Regla de Ruffini: divide $P(x)$ entre $(x + a)$. A la izquierda se escribe $-a$; se baja el primer coeficiente, se multiplica por $-a$ y se suma al siguiente. El último número es el resto.

$$(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$$

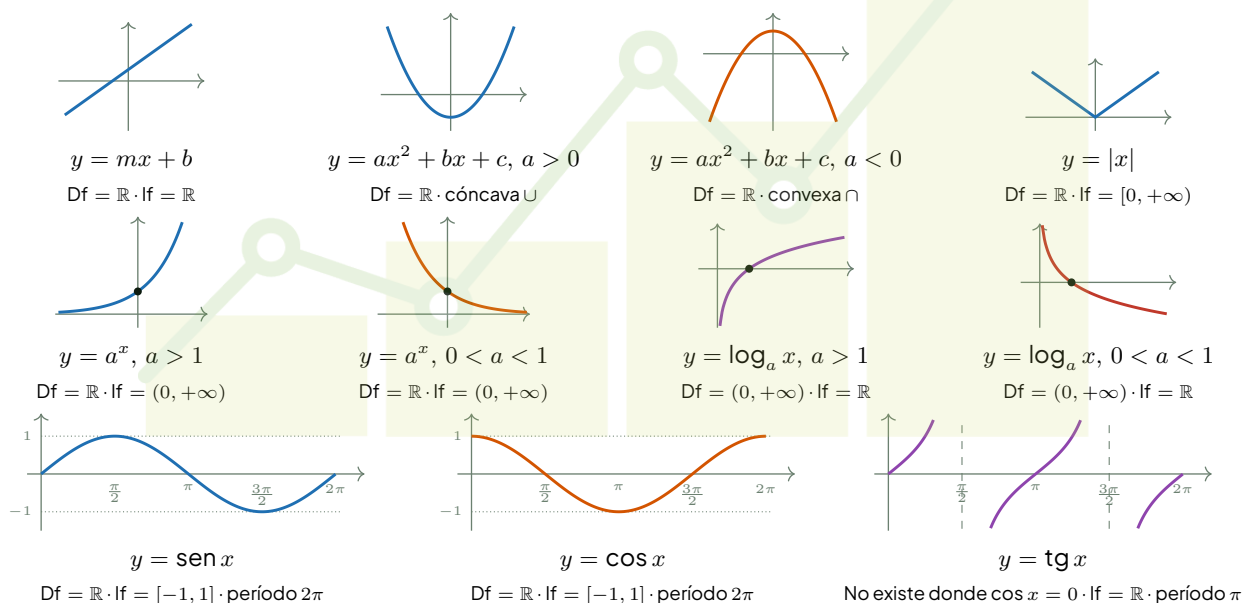
1	0	-7	6
1	1	1	-6
1	1	-6	0

$$x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$$

 **Con la calculadora** (Casio Classwiz): dónde están las raíces de un polinomio de grado 2, 3 o 4.



Las funciones elementales de un vistazo



✓ EN RESUMEN

Lo que no te puedes olvidar antes de pasar al Tema 3:

- **Dominios**: denominadores $\neq 0$, radicandos (índice par) ≥ 0 , argumentos de logaritmos > 0 ; todas las condiciones a la vez.
- **Factorizar polinomios**: ecuación de segundo grado, Ruffini y teorema del resto.
- **Logaritmos**: $\log(ab) = \log a + \log b$ y $\log(b^n) = n \log b$; nunca $\log(a + b) = \log a + \log b$.
- **Trigonometría**: $\sin x$ y $\cos x$ están siempre entre -1 y 1 , y $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.