



Qué vas a aprender.

A operar con **polinomios**, a usar las **igualdades notables**, a hallar las raíces de un polinomio de **segundo grado** y de **grado superior** con la regla de **Ruffini**, a **factorizar** y a descomponer un cociente en **fracciones simples**.

⚠ Lee esto antes de empezar.

De este tema **no hay preguntas directas** en el examen. Sin embargo, es la base imprescindible para resolver las que sí entran.

🌐 Mapa del bloque

🌐 Para qué sirve cada apartado

#	Apartado	Lo vas a usar sobre todo en...
1	Polinomios y operaciones	todos los temas
2	Igualdades notables	T4 y T5 (límites dobles)
3	Polinomios de segundo grado	T8 y T9 (optimización)
4	División, Ruffini y teorema del resto	T4 (límites $\frac{0}{0}$)
5	Grado superior · factorización	T4 · T10 (integrales)
6	Fracciones algebraicas	T4 (simplificar)
7	Fracciones simples	T10 y T11 (integrales)

💡 **Idea clave.** Casi todo en este bloque es **factorizar**: escribir un polinomio como producto. Con el polinomio factorizado se simplifican los límites, se resuelven las ecuaciones y se integran los cocientes.

1 Polinomios y operaciones

Qué es

Un **polinomio** es una expresión algebraica de la forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n es un número natural que indica el **grado**; $a_n, \dots, a_1, a_0$ son números reales denominados **coeficientes**; a_n es el **coeficiente principal** y a_0 el **término independiente**.

- **Suma:** se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.
- **Producto:** se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y se agrupan los términos del mismo grado.

Ejemplo resuelto

Obtén la suma de $P(x) = x^2 + x + 2$ **y** $Q(x) = 2x^3 + 2x + 5$.

Paso 1 · escribo la suma de los dos polinomios, cada uno en su paréntesis:

$$(P + Q)(x) = (x^2 + x + 2) + (2x^3 + 2x + 5)$$

Paso 2 · quito los paréntesis y coloco los términos de mayor a menor grado, con los del mismo grado juntos:

$$= 2x^3 + x^2 + \underbrace{x + 2x}_{\text{grado 1}} + \underbrace{2 + 5}_{\text{grado 0}}$$

Paso 3 · sumo los términos del mismo grado: $x + 2x = 3x$ y $2 + 5 = 7$.

$$= \boxed{2x^3 + x^2 + 3x + 7}$$

 Ejemplo resuelto

Obtén el producto de $P(x) = x^2 + x + 2$ **y** $Q(x) = 2x^3 + 2x + 5$.

Paso 1 · escribo el producto de los dos polinomios:

$$(P \cdot Q)(x) = (x^2 + x + 2) \cdot (2x^3 + 2x + 5)$$

Paso 2 · multiplico **cada término** del primero por **cada término** del segundo. Son $3 \cdot 3 = 9$ productos:

$$\begin{aligned} &= x^2 \cdot 2x^3 + x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot 5 \\ &\quad + x \cdot 2x^3 + x \cdot 2x + x \cdot 5 \\ &\quad + 2 \cdot 2x^3 + 2 \cdot 2x + 2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Paso 3 · hago cada producto: se multiplican los números y se suman los exponentes de x .

$$= 2x^5 + 2x^3 + 5x^2 + 2x^4 + 2x^2 + 5x + 4x^3 + 4x + 10$$

Paso 4 · ordeno de mayor a menor grado y sumo los términos del mismo grado:

$$\begin{aligned} &= 2x^5 + 2x^4 + (2 + 4)x^3 + (5 + 2)x^2 + (5 + 4)x + 10 \\ &= \boxed{2x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 9x + 10} \end{aligned}$$

 EN RESUMEN

Solo se pueden sumar términos del **mismo grado**. Al multiplicar, los exponentes se suman.

2 Igualdades notables

📌 Qué es

Son operaciones con binomios que se emplean con mucha frecuencia y conviene **memorizar**:

Cuadrado de la suma $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Cuadrado de la diferencia $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Suma por diferencia $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Diferencia de cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Suma de cubos $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

De izquierda a derecha sirven para **desarrollar**; de derecha a izquierda, para **factorizar**.

📌 Ejemplo resuelto

Desarrolla $(x + 5)^2$.

Paso 1 · es el cuadrado de una suma, con $a = x$ y $b = 5$:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \Rightarrow x^2 + 10x + 25$$

📌 Ejemplo resuelto

Factoriza $x^2 - 25$.

Paso 1 · $x^2 - 25 = x^2 - 5^2$ es una diferencia de cuadrados: suma por diferencia.

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

 Ejemplo resuelto

Factoriza $x^3 - 8$.

Paso 1 · $x^3 - 8 = x^3 - 2^3$ es una diferencia de cubos, con $a = x$ y $b = 2$:

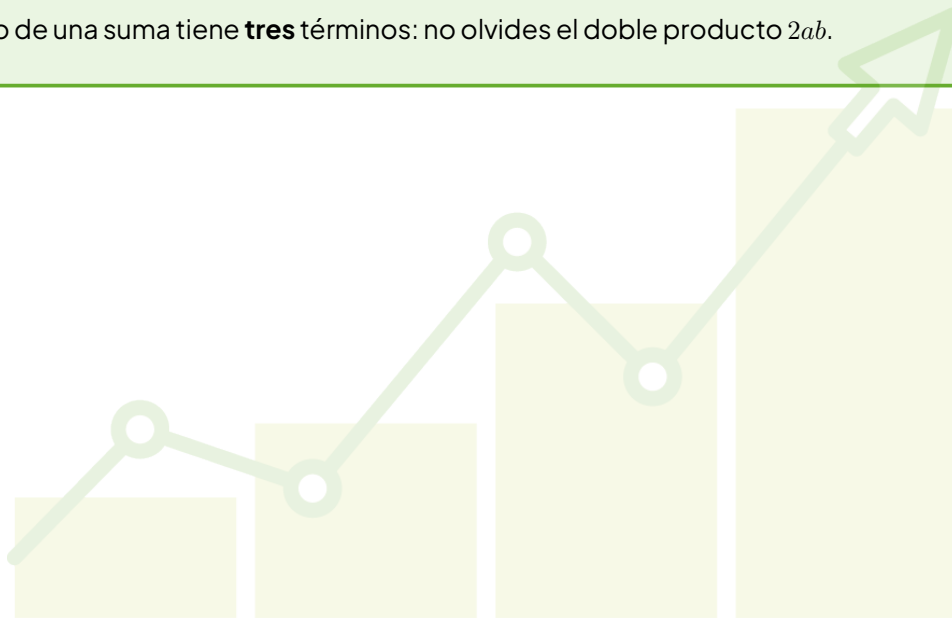
$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Paso 2 · compruebo multiplicando los dos paréntesis: tiene que salir la expresión inicial.

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$$

 EN RESUMEN

El cuadrado de una suma tiene **tres** términos: no olvides el doble producto $2ab$.



3 Polinomios de segundo grado

Raíces

Las **raíces** de $P(x) = ax^2 + bx + c$ son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El número de raíces depende del **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta > 0$: dos raíces reales distintas.
- $\Delta = 0$: una raíz real doble.
- $\Delta < 0$: ninguna raíz real.

Factorización

Si x_1 y x_2 son las raíces, el polinomio se escribe como producto:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- La a es la **misma a del polinomio**: el número que multiplica a x^2 . Hace falta porque $(x - x_1)(x - x_2)$ empieza siempre por x^2 , y el polinomio empieza por ax^2 . Si $a = 1$, no se escribe.
- Cada raíz entra con el **signo cambiado**.

Ejemplo resuelto

Halla las raíces de $x^2 + x - 2$.

Paso 1 · las raíces son los valores que anulan el polinomio. Lo **iguala a cero**:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Paso 2 · aplico la fórmula con $a = 1$, $b = 1$ y $c = -2$:

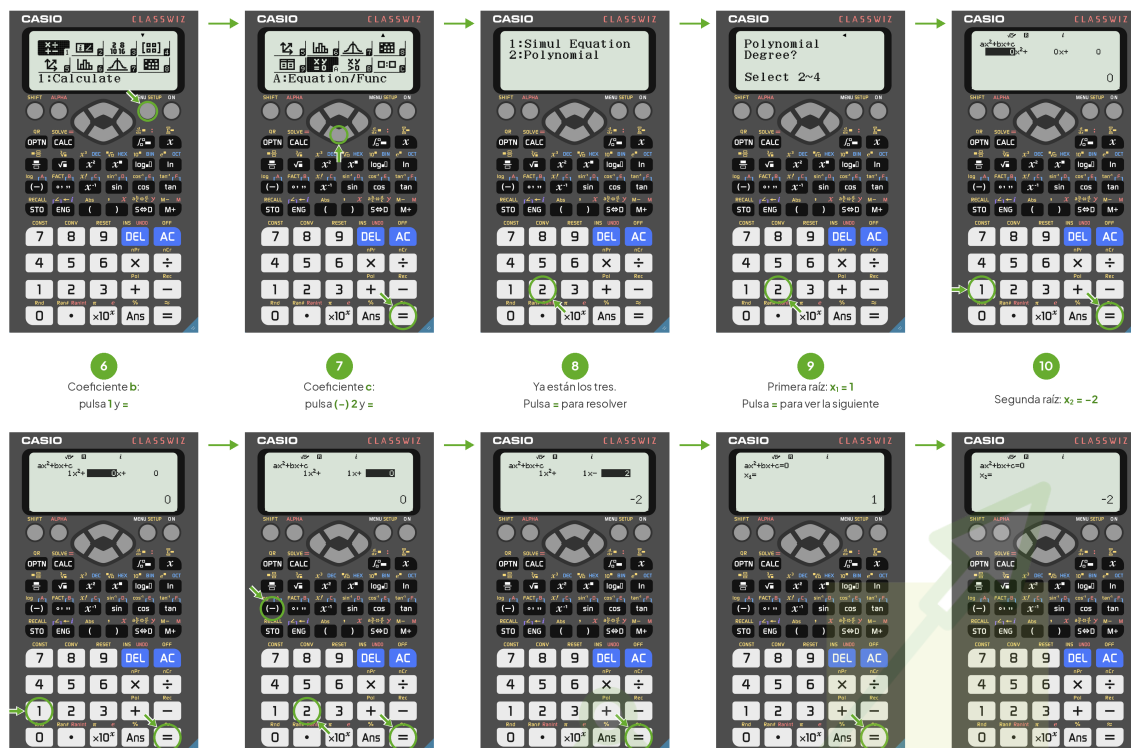
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Paso 3 · separo los dos signos:

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \quad x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

Las raíces de $x^2 + x - 2$ con la calculadora

- 1 Pula MENU
- 2 Baja con $\blacktriangledown$ hasta el icono A y pulsa =
- 3 Pula 2 para entrar en Polynomial
- 4 Pula 2: polinomio de grado 2
- 5 Coeficiente a: pulsa 1 y =
- 6 Coeficiente b: pulsa 1 y =
- 7 Coeficiente c: pulsa (-) 2 y =
- 8 Ya están los tres. Pula = para resolver
- 9 Primera raíz: $x_1 = 1$
Pula = para ver la siguiente
- 10 Segunda raíz: $x_2 = -2$



Ejemplo resuelto

Factoriza $x^2 + x - 2$.

Paso 1 · igualo a cero y aplico la fórmula para hallar las raíces:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

Paso 2 · el número que multiplica a x^2 es $a = 1$. Escribo $a(x - x_1)(x - x_2)$:

$$1 \cdot (x - (-2))(x - 1) \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

 Ejemplo resuelto

Factoriza $2x^2 + 2x - 4$.

Paso 1 · igualo a cero y aplico la fórmula con $a = 2$, $b = 2$ y $c = -4$:

$$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{4} = \frac{-2 \pm 6}{4}$$

Paso 2 · separo los dos signos:

$$x_1 = \frac{-2 - 6}{4} = -2 \qquad x_2 = \frac{-2 + 6}{4} = 1$$

Paso 3 · el número que multiplica a x^2 es $a = 2$. Escribo $a(x - x_1)(x - x_2)$, sin olvidar el 2 delante:

$$2x^2 + 2x - 4 = 2(x + 2)(x - 1)$$

Paso 4 · compruebo: $2(x + 2)(x - 1) = 2(x^2 + x - 2) = 2x^2 + 2x - 4$.

 EN RESUMEN

Para hallar las raíces, se iguala a cero y se aplica la fórmula. Con ellas, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde a es el número que multiplica a x^2 .

4 División, regla de Ruffini y teorema del resto

Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** es una forma rápida de dividir un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$ o $x + a$.

1. Se ordenan los términos de forma decreciente y se escriben los **coeficientes**, poniendo 0 en los términos que falten.
2. A la izquierda se coloca a (para dividir entre $x - a$) o $-a$ (para dividir entre $x + a$).
3. Se baja el primer coeficiente, se multiplica por el número de la izquierda y se coloca debajo del siguiente. Se suma y se repite.

El último número es el **resto**; los anteriores son los coeficientes del **cociente**, que tiene un grado menos.

Teorema del resto

El resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al valor numérico del polinomio en $x = a$, es decir, $P(a)$. Si $P(a) = 0$, entonces a es **raíz** y la división es exacta.

Ejemplo resuelto

Divide $P(x) = x^2 + x - 6$ **entre** $x - 3$ **por la regla de Ruffini.**

Paso 1 · coeficientes 1, 1, -6. A la izquierda, $a = 3$:

	1	1	-6
3		3	12
	1	4	6

Paso 2 · cociente $x + 4$ y resto 6:

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 3} = x + 4 + \frac{6}{x - 3}$$

 Ejemplo resuelto

Halla, sin hacer la división, el resto de dividir $P(x) = x^2 + x - 6$ **entre** $x - 3$.

Paso 1 · por el teorema del resto, el resto de dividir entre $(x - 3)$ es el valor del polinomio en $x = 3$.

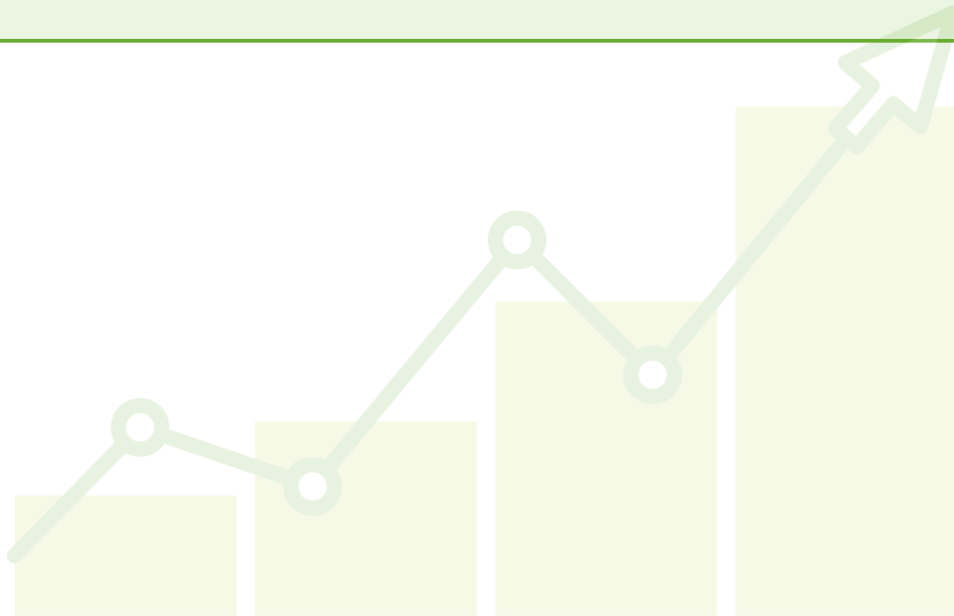
Paso 2 · sustituyo:

$$P(3) = 3^2 + 3 - 6 \Rightarrow \boxed{6}$$

Es el mismo resto que salió con Ruffini.

✓ EN RESUMEN

Ruffini divide entre $(x - a)$ poniendo a a la izquierda. El resto es $P(a)$.



5 Polinomios de grado superior · factorización

Qué es

Factorizar un polinomio es escribirlo como producto de factores más sencillos.

- Un polinomio de grado n puede tener, como máximo, n raíces reales.
- Las **raíces enteras**, si existen, se encuentran entre los **divisores del término independiente**.
- Cada raíz a da un factor $(x - a)$.

Cómo se trabaja

1. Si no hay término independiente, saca **factor común** x .
2. Prueba los divisores del término independiente hasta encontrar una raíz.
3. Divide por Ruffini entre $(x - a)$: el cociente tiene un grado menos.
4. Repite con el cociente. Cuando sea de grado 2, usa la fórmula.

Ejemplo resuelto

Factoriza $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Paso 1 · las posibles raíces son los divisores de 2: $-2, -1, 1$ y 2 . Pruebo con 1 y sigo con -1 en la misma tabla:

	1	-2	-1	2
1		1	-1	-2
	1	-1	-2	0
-1		-1	2	
	1	-2	0	

Paso 2 · raíces 1 y -1 ; queda el cociente $x - 2$, que da la raíz 2 :

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

Las raíces de $x^3 - 2x^2 - x + 2$ con la calculadora

- 1
Pulsa MENU
- 2
Baja con ∇ hasta el icono A y pulsa =
- 3
Pulsa 2 para entrar en Polynomial
- 4
Pulsa 3: polinomio de grado 3
- 5
Coeficiente a: pulsa 1 y =
- 6
Coeficiente b: pulsa (-) 2 y =
- 7
Coeficiente c: pulsa (-) 1 y =
- 8
Coeficiente d: pulsa 2 y =
- 9
Ya están los cuatro. Pulsa = para resolver
- 10
Primera raíz: $x_1 = -1$
Pulsa = para ver la siguiente
- 11
Segunda raíz: $x_2 = 2$
Pulsa = para ver la siguiente
- 12
Tercera raíz: $x_3 = 1$



✓ EN RESUMEN

Las raíces enteras están entre los divisores del término independiente. Cada raíz a da un factor $(x - a)$.

6 Fracciones algebraicas

Qué es

Una **fracción algebraica** es un cociente de polinomios, $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Se opera con ella igual que con las fracciones de números.

- **Simplificar**: se factorizan numerador y denominador y se cancelan los **factores** comunes.
- **Sumar**: se reduce a denominador común.

⚠ **Cuidado**. Solo se cancelan **factores** (lo que multiplica a todo), nunca sumandos: en $\frac{x+2}{x+1}$ no se pueden tachar las x .

Ejemplo resuelto

Simplifica $\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$.

Paso 1 · factorizo el numerador, que es una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

Paso 2 · factorizo el denominador. Sus raíces son $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$, es decir, 2 y -1:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Paso 3 · cancelo el factor común $(x - 2)$:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} \Rightarrow \boxed{\frac{x + 2}{x + 1}}$$

✓ EN RESUMEN

Para simplificar, primero **factorizar**. Es justo lo que se hace para resolver un límite $\frac{0}{0}$.

7 Descomposición en suma de fracciones simples

Qué es

Consiste en escribir una fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de otras más simples. Para ello se factoriza el denominador. Según sus raíces:

Caso 1. $Q(x)$ tiene raíces reales **distintas**. Cada factor da una fracción:

$$\frac{P(x)}{(x - a_1)(x - a_2)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2}$$

Caso 2. $Q(x)$ tiene una raíz real que **se repite**. Da una fracción por cada potencia:

$$\frac{P(x)}{(x - a)^2} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2}$$

Si hay un factor de segundo grado **sin raíces reales**, su fracción lleva arriba $Mx + N$.

Ejemplo resuelto

Descompón en fracciones simples $\frac{3x + 1}{x^2 - 1}$.

Paso 1 · factorizo el denominador y planteo una fracción por factor:

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Paso 2 · igualo los numeradores: $3x + 1 = A(x + 1) + B(x - 1) = (A + B)x + (A - B)$.

Paso 3 · igualo los coeficientes del mismo grado y resuelvo el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3 = A + B \\ 1 = A - B \end{array} \right\} \Rightarrow A = 2, \quad B = 1$$

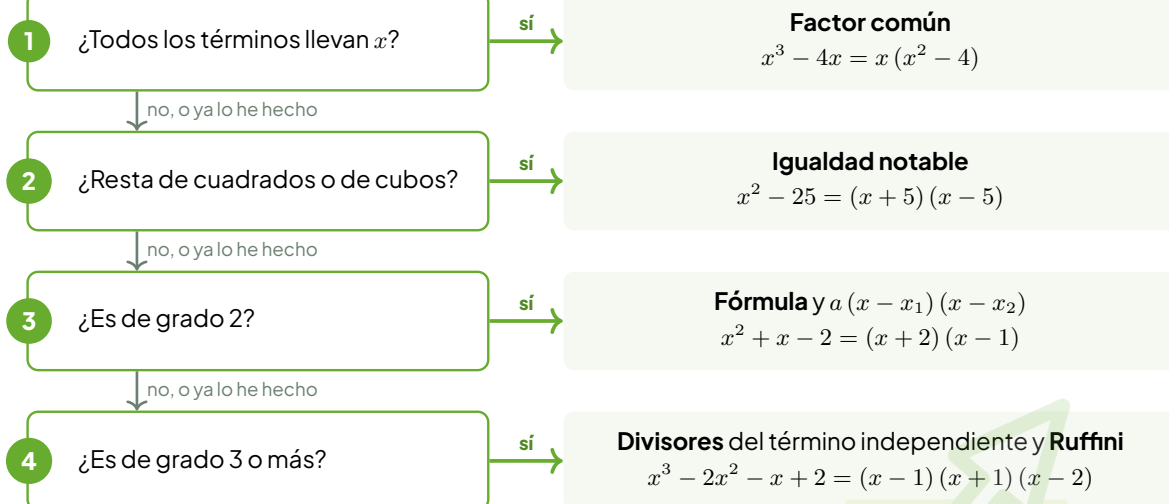
$$\boxed{\frac{3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}}$$

✓ EN RESUMEN

Factorizar el denominador, una fracción por factor, igualar numeradores. Es el paso previo para integrar cocientes de polinomios.

✓ Lo que no te puedes olvidar

📄 Cómo factorizar un polinomio · pregúntate esto, en este orden



El cuadrado de una suma

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

⚠ $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$

Ruffini y el resto

	1	1	-6
3		3	12
	1	4	6

Para dividir entre $(x - 3)$,
a la izquierda va **3**.

El último número es el **resto**:

$$P(3) = 3^2 + 3 - 6 = 6$$

Si el resto es 0, es **raíz**.

Solo se cancelan factores

Sí: lo que **multiplica** a todo.

$$\frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{x + 2}{x + 1}$$

No: lo que está **sumando**.

⚠ $\frac{x + 2}{x + 1} \neq \frac{2}{1}$