

BLOQUE 4 — DERIVADAS PARCIALES

4.1. QUÉ CAMBIA AL DERIVAR RESPECTO A UNA VARIABLE

Hasta ahora todas las funciones dependían de una sola variable, x . Pero muchas funciones reales dependen de dos (o más) — por ejemplo, unas ventas que dependen a la vez del precio y de la inversión en publicidad. Cuando eso pasa, ya no existe «la» derivada: existen varias derivadas parciales, una por cada variable.

La idea es sencillísima: para derivar respecto a x , tratas y como si fuera un número cualquiera — una constante, como el 5 o el 3. Y al revés: para derivar respecto a y , tratas x como constante. El resto es exactamente lo que ya sabes de los Bloques 2 y 3.

«Congelamos» y

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = x^2 + A$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad y = \text{constante}$$

Derivamos respecto a x :

«Congelamos» x

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = A + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad x = \text{constante}$$

Derivamos respecto a y :

Para cada derivada parcial, «congelas» la otra variable como si fuera un número.

Primer ejemplo, paso a paso

Deriva $f(x,y) = x^2 + y^2$

Para $\partial f / \partial x$: tratamos y^2 como una constante (como si fuera el número 7). La derivada de x^2 es $2x$, y la derivada de una constante es 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x$$

Para $\partial f / \partial y$: ahora tratamos x^2 como la constante. La derivada de y^2 es $2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2y$$



Fíjate: cada derivada parcial se calcula exactamente como en el Bloque 2 — solo que la otra letra desaparece del resultado por ser «constante» (su derivada es 0), salvo que las dos variables estén mezcladas en el mismo término (eso lo veremos enseguida).



4.2. NOTACIÓN

Notación	Se lee / se usa cuando...
$\frac{\partial f}{\partial x}$	«derivada parcial de f respecto a x» — la más habitual
$\frac{\partial f}{\partial y}$	«derivada parcial de f respecto a y»
f_x	forma abreviada de $\partial f / \partial x$
f_y	forma abreviada de $\partial f / \partial y$

⚠ El símbolo ∂ no es una "d"

Es una letra distinta (se llama «d parcial» o «della») y avisa de que hay más de una variable en juego. Cuando veas ∂ en vez de d, ya sabes que toca «congelar» la otra variable.

4.3. PROGRESIÓN DE EJEMPLOS

Cuando x e y aparecen juntas en el mismo término

El caso anterior era fácil porque cada término tenía solo una variable. Pero ¿qué pasa con un término como x^2y^3 , donde están las dos mezcladas? La respuesta es la misma idea de siempre: la variable que no tocas actúa como coeficiente constante.

Ejemplo 1. $f(x, y) = x^2y^3$

$$f_x = y^3 \cdot 2x = 2xy^3$$

$$f_y = x^2 \cdot 3y^2 = 3x^2y^2$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2xy^3$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 3x^2y^2$$

💡 Para $\partial f / \partial x$: y^3 actúa como un número que multiplica a $x^2 \rightarrow$ se deriva x^2 normalmente ($2x$) y se deja y^3 igual: $2xy^3$. Para $\partial f / \partial y$: x^2 actúa como el número que multiplica a $y^3 \rightarrow$ se deriva y^3 normalmente ($3y^2$) y se deja x^2 igual: $3x^2y^2$.



Con evaluación en un punto

En examen es habitual que, además de las derivadas parciales, os pidan su valor en un punto concreto $P_0=(x_0,y_0)$. Para evaluar en un punto, primero derivas, luego sustituyes.

Ejemplo 2. $f(x,y) = 2x - y^2 + 5$ en $P_0 = (1, -1)$ *Calcula derivadas parciales*

$$f_x = 2 \longrightarrow f_x(1, -1) = 2$$

$$f_y = -2y \longrightarrow f_y(1, -1) = -2(-1) = 2$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2$$

$$\partial f / \partial y = f_y = -2y$$

En $P_0 = (1, -1)$: $f_x(1, -1) = 2$ $f_y(1, -1) = -2 \cdot (-1) = 2$

Combinada con exponencial (regla de la cadena parcial)

La regla de la cadena del Bloque 3 también se aplica aquí — solo que, al derivar el exponente, hay que recordar cuál de las dos letras es la que se está tratando como variable en cada caso.

Ejemplo 3. $f(x,y) = 3x^5y^2 - xy + 4e^{x^2-y}$

$$f_x = 3y^2 \cdot 5x^4 - y \cdot 1 + 4 \cdot e^{x^2-y} \cdot 2x = 15x^4y^2 - y + 8xe^{x^2-y}$$

$$f_y = 3x^5 \cdot 2y - x \cdot 1 + 4e^{x^2-y} \cdot (-1) = 6x^5y - x - 4e^{x^2-y}$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 15x^4y^2 - y + 8x \cdot e^{x^2-y}$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 6x^5y - x - 4 \cdot e^{x^2-y}$$

⚠ El exponente x^2-y también hay que derivarlo dos veces

Al derivar $4e^{(x^2-y)}$ respecto a x , la derivada del exponente (x^2-y) respecto a x es $2x$ — por eso aparece el « $8x$ » ($4 \cdot 2x$). Respecto a y , la derivada del exponente es -1 — por eso aparece el signo menos delante del último término.



4.4. EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Nivel 1 — Términos separados (cada uno con una sola variable)

Ejercicio 1. $f(x, y) = x^3 + y^2$

$$f_x = 3x^2$$

$$f_y = 2y$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 3x^2$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 2y$$

Ejercicio 2. $f(x, y) = x^2 - 3y + 7$

$$f_x = 2x$$

$$f_y = -3$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2x$$

$$\partial f / \partial y = f_y = -3$$

Ejercicio 3. $f(x, y) = 4x - y^3$

$$f_x = 4$$

$$f_y = -3y^2$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 4$$

$$\partial f / \partial y = f_y = -3y^2$$



Nivel 2 — x e y mezcladas en el mismo término

Ejercicio 4. $f(x,y) = x^2y$

$$f_x = y \cdot 2x = 2xy$$

$$f_y = x^2$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2xy$$

$$\partial f / \partial y = f_y = x^2$$

Ejercicio 5. $f(x,y) = xy^3$

$$f_x = y^3$$

$$f_y = x \cdot 3y^2$$

$$\partial f / \partial x = f_x = y^3$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 3xy^2$$

Ejercicio 6. $f(x,y) = 5x^3y^2$

$$f_x = 5y^2 \cdot 3x^2 = 15x^2y^2$$

$$f_y = 5x^3 \cdot 2y = 10x^3y$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 15x^2y^2$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 10x^3y$$

Nivel 3 — Con exponencial o logaritmo

Ejercicio 7. $f(x, y) = e^{x+y}$

$$f_x = e^{x+y} \cdot 1 = e^{x+y}$$

$$f_y = e^{x+y} \cdot 1 = e^{x+y}$$

$$\partial f / \partial x = f_x = e^{x+y}$$

$$\partial f / \partial y = f_y = e^{x+y}$$

Ejercicio 8. $f(x, y) = e^{xy}$

$$f_x = e^{xy} \cdot y \cdot 1 = y e^{xy}$$

$$f_y = e^{xy} \cdot x \cdot 1 = x e^{xy}$$

$$\partial f / \partial x = f_x = y \cdot e^{xy}$$

$$\partial f / \partial y = f_y = x \cdot e^{xy}$$

Ejercicio 9. $f(x, y) = \ln(x + y)$

$$f_x = \frac{1}{x+y} \cdot 1 = \frac{1}{x+y}$$

$$f_y = \frac{1}{x+y} \cdot 1 = \frac{1}{x+y}$$

$$\partial f / \partial x = f_x = \frac{1}{x+y}$$

$$\partial f / \partial y = f_y = \frac{1}{x+y}$$



Nivel 4 — Mezcla completa, evaluada en un punto

Ejercicio 10. $f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 5$ en $P_0 = (2, 1)$

$$f_x = y^2x - 2y^2 \cdot 1 = 2xy - 2y^2 \quad f_x(2,1) = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 1}^4 - \overbrace{2 \cdot 1^2}^2 = 2$$

$$f_y = x^2 \cdot 1 - 2x \cdot 2y = x^2 - 4xy \quad f_y(2,1) = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2xy - 2y^2$$

$$\partial f / \partial y = f_y = x^2 - 4xy$$

En $P_0 = (2, 1)$: $f_x(2,1) = 4 - 2 = 2$ $f_y(2,1) = 4 - 8 = -4$

Ejercicio 11. $f(x,y) = 5x^2y + 10xy^3 - 2x^2 + 5y$ en $P_0 = (1, 1)$

$$f_x = 5y^2x + 10y^3 \cdot 1 - 2 \cdot 2x = 10xy + 10y^3 - 4x$$

$$f_x(1,1) = 10 \cdot 1 \cdot 1 + 10 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1 = 10 + 10 - 4 = 16$$

$$f_y = 5x^2 \cdot 1 + 10x \cdot 3y^2 + 5 = 5x^2 + 30xy^2 + 5$$

$$f_y(1,1) = 5 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 \cdot 1^2 + 5 = 5 + 30 + 5 = 40$$

$$\partial f / \partial x = f_x = 10xy + 10y^3 - 4x$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 5x^2 + 30xy^2 + 5$$

En $P_0 = (1, 1)$: $f_x(1,1) = 16$ $f_y(1,1) = 40$