

BLOQUE 4 — DERIVADAS PARCIALES

4.1. QUÉ CAMBIA AL DERIVAR RESPECTO A UNA VARIABLE

Hasta ahora todas las funciones dependían de una sola variable, x . Pero muchas funciones reales dependen de dos (o más) — por ejemplo, unas ventas que dependen a la vez del precio y de la inversión en publicidad. Cuando eso pasa, ya no existe «la» derivada: existen varias derivadas parciales, una por cada variable.

La idea es sencillísima: para derivar respecto a x , tratas y como si fuera un número cualquiera — una constante, como el 5 o el 3. Y al revés: para derivar respecto a y , tratas x como constante. El resto es exactamente lo que ya sabes de los Bloques 2 y 3.

«Congelamos» y

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$y = \text{constante}$

Derivamos respecto a x :

«Congelamos» x

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$x = \text{constante}$

Derivamos respecto a y :

Para cada derivada parcial, «congelas» la otra variable como si fuera un número.

Primer ejemplo, paso a paso

Deriva $f(x,y) = x^2 + y^2$

Para $\partial f / \partial x$: tratamos y^2 como una constante (como si fuera el número 7). La derivada de x^2 es $2x$, y la derivada de una constante es 0.

$$f_x = 2x$$

Para $\partial f / \partial y$: ahora tratamos x^2 como la constante. La derivada de y^2 es $2y$.

$$f_y = 2y$$

💡 *Fíjate: cada derivada parcial se calcula exactamente como en el Bloque 2 — solo que la otra letra desaparece del resultado por ser «constante» (su derivada es 0), salvo que las dos variables estén mezcladas en el mismo término (eso lo veremos enseguida).*



4.2. NOTACIÓN

Notación	Se lee / se usa cuando...
$\frac{\partial f}{\partial x}$	«derivada parcial de f respecto a x» — la más habitual
$\frac{\partial f}{\partial y}$	«derivada parcial de f respecto a y»
f_x	forma abreviada de $\partial f / \partial x$
f_y	forma abreviada de $\partial f / \partial y$

⚠ El símbolo ∂ no es una "d"

Es una letra distinta (se llama «d parcial» o «della») y avisa de que hay más de una variable en juego. Cuando veas ∂ en vez de d, ya sabes que toca «congelar» la otra variable.

4.3. PROGRESIÓN DE EJEMPLOS

Cuando x e y aparecen juntas en el mismo término

El caso anterior era fácil porque cada término tenía solo una variable. Pero ¿qué pasa con un término como x^2y^3 , donde están las dos mezcladas? La respuesta es la misma idea de siempre: la variable que no tocas actúa como coeficiente constante.

Ejemplo 1. $f(x, y) = x^2y^3$

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x &= f_x = 2xy^3 \\ \partial f / \partial y &= f_y = 3x^2y^2\end{aligned}$$

💡 Para $\partial f / \partial x$: y^3 actúa como un número que multiplica a $x^2 \rightarrow$ se deriva x^2 normalmente ($2x$) y se deja y^3 igual: $2xy^3$. Para $\partial f / \partial y$: x^2 actúa como el número que multiplica a $y^3 \rightarrow$ se deriva y^3 normalmente ($3y^2$) y se deja x^2 igual: $3x^2y^2$.



Con evaluación en un punto

En examen es habitual que, además de las derivadas parciales, os pidan su valor en un punto concreto $P_0=(x_0,y_0)$. Para evaluar en un punto, primero derivas, luego sustituyes.

Ejemplo 2. $f(x,y) = 2x - y^2 + 5$ en $P_0 = (1, -1)$

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x &= f_x = 2 \\ \partial f / \partial y &= f_y = -2y\end{aligned}$$

En $P_0 = (1, -1)$: $f_x(1, -1) = 2$ $f_y(1, -1) = -2 \cdot (-1) = 2$

Combinada con exponencial (regla de la cadena parcial)

La regla de la cadena del Bloque 3 también se aplica aquí — solo que, al derivar el exponente, hay que recordar cuál de las dos letras es la que se está tratando como variable en cada caso.

Ejemplo 3. $f(x,y) = 3x^5y^2 - xy + 4e^{x^2-y}$

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x &= f_x = 15x^4y^2 - y + 8x \cdot e^{x^2-y} \\ \partial f / \partial y &= f_y = 6x^5y - x - 4 \cdot e^{x^2-y}\end{aligned}$$

⚠ El exponente x^2-y también hay que derivarlo dos veces

Al derivar $4e^{(x^2-y)}$ respecto a x , la derivada del exponente (x^2-y) respecto a x es $2x$ — por eso aparece el « $8x$ » ($4 \cdot 2x$). Respecto a y , la derivada del exponente es -1 — por eso aparece el signo menos delante del último término.

4.4. EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Nivel 1 — Términos separados (cada uno con una sola variable)

Ejercicio 1. $f(x,y) = x^3 + y^2$

$$\partial f / \partial x = f_x = 3x^2$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 2y$$

Ejercicio 2. $f(x,y) = x^2 - 3y + 7$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2x$$

$$\partial f / \partial y = f_y = -3$$

Ejercicio 3. $f(x,y) = 4x - y^3$

$$\partial f / \partial x = f_x = 4$$

$$\partial f / \partial y = f_y = -3y^2$$



Nivel 2 — x e y mezcladas en el mismo término

Ejercicio 4. $f(x,y) = x^2y$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2xy$$

$$\partial f / \partial y = f_y = x^2$$

Ejercicio 5. $f(x,y) = xy^3$

$$\partial f / \partial x = f_x = y^3$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 3xy^2$$

Ejercicio 6. $f(x,y) = 5x^3y^2$

$$\partial f / \partial x = f_x = 15x^2y^2$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 10x^3y$$



Nivel 3 — Con exponencial o logaritmo

Ejercicio 7. $f(x, y) = e^{x+y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = e^{x+y}$$

Ejercicio 8. $f(x, y) = e^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = y \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = x \cdot e^{xy}$$

Ejercicio 9. $f(x, y) = \ln(x + y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{x+y}$$



Nivel 4 — Mezcla completa, evaluada en un punto

Ejercicio 10. $f(x,y) = x^2y - 2xy^2 + 5$ en $P_0 = (2, 1)$

$$\partial f / \partial x = f_x = 2xy - 2y^2$$

$$\partial f / \partial y = f_y = x^2 - 4xy$$

En $P_0 = (2, 1)$: $f_x(2,1) = 4 - 2 = 2$ $f_y(2,1) = 4 - 8 = -4$

Ejercicio 11. $f(x,y) = 5x^2y + 10xy^3 - 2x^2 + 5y$ en $P_0 = (1, 1)$

$$\partial f / \partial x = f_x = 10xy + 10y^3 - 4x$$

$$\partial f / \partial y = f_y = 5x^2 + 30xy^2 + 5$$

En $P_0 = (1, 1)$: $f_x(1,1) = 16$ $f_y(1,1) = 40$