

## BLOQUE 1 — ¿QUÉ ES UNA DERIVADA?

### DE LA TASA MEDIA A LA DERIVADA

Antes de definir la derivada, conviene entender una idea más sencilla: la tasa de variación media.

Imagina que quieres saber cómo cambia una función  $f(x)$  entre dos puntos,  $x_1$  y  $x_2$ . La forma más natural de medirlo es igual que calculamos la pendiente de una recta:

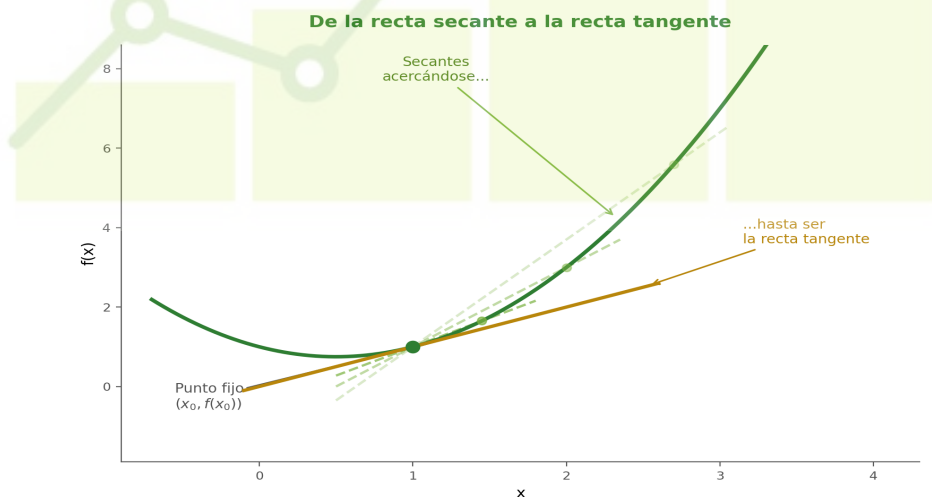
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Esto es la pendiente de la recta que une esos dos puntos de la curva (se llama recta secante, porque corta la curva en dos puntos). Te dice cómo ha cambiado la función de media en ese tramo — pero no te dice nada sobre lo que pasa en un instante concreto.

**¿Y si quisiéramos saber el ritmo de cambio justo en un punto, no en un tramo?** Para eso, acercamos cada vez más el segundo punto ( $x_2$ ) al primero ( $x_1$ ), hasta que la distancia entre ambos sea prácticamente cero. Cuando hacemos eso, la recta secante deja de cortar la curva en dos puntos y pasa a tocarla en uno solo: se convierte en la recta tangente.



*Eso es la derivada: la tasa de variación, pero en un instante concreto en lugar de en un tramo. Es el mismo cálculo de la pendiente ( $\Delta y / \Delta x$ ), llevado al límite de que los dos puntos se juntan en uno.*



*Al acercar los dos puntos, la recta secante se convierte en la recta tangente: de tasa media a derivada.*



#### No los confundas

La tasa de variación media (con dos puntos, un tramo) y la derivada (con un solo punto, un instante) no son lo mismo — la segunda es el caso límite de la primera. Es un error habitual mezclarlas en los primeros ejercicios.



## INTERPRETACIÓN ECONÓMICA

Este concepto aparece constantemente en economía y empresa. Un ejemplo clásico: si  $C(x)$  es el coste de producir  $x$  unidades, el coste marginal — cuánto cuesta producir una unidad extra ahora mismo — es exactamente la derivada de  $C(x)$ . No es un caso especial: cada vez que en economía se habla de algo «marginal» (coste marginal, ingreso marginal, productividad marginal), se está hablando de una derivada.

## RECTA TANGENTE: LECTURA DEL SIGNO

La derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente ahí. Esto se traduce en:

| Derivada | La curva en ese punto...         |
|----------|----------------------------------|
| Positiva | sube                             |
| = 0      | está plana (tangente horizontal) |
| Negativa | baja                             |



*Esta idea será la base para encontrar máximos y mínimos de una función.*

## NOTACIÓN — TODAS SIGNIFICAN LO MISMO

| Notación        | Se usa cuando...                             |
|-----------------|----------------------------------------------|
| $f'(x)$         | hablamos de la función derivada en general   |
| $f'(x_0)$       | queremos el valor en un punto concreto $x_0$ |
| $\frac{dy}{dx}$ | la función está escrita como $y = f(x)$      |
| $y'$            | forma abreviada de $dy/dx$                   |



## BLOQUE 2 — DERIVADAS DIRECTAS

### 2.1. TABLA DE DERIVADAS BÁSICAS

Estas son las piezas fundamentales. Antes de combinar nada, hay que dominarlas una a una, sin pensar.

#### Potenciales y raíces

| Función                | Derivada                      |
|------------------------|-------------------------------|
| $f(x) = k$ (constante) | $f'(x) = 0$                   |
| $f(x) = x$             | $f'(x) = 1$                   |
| $f(x) = x^n$           | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$     |
| $f(x) = \sqrt{x}$      | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |



Por qué funciona con raíces: una raíz es una potencia fraccionaria.  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ , así que aplicando la misma regla de la potencia se llega a  $1/(2\sqrt{x})$ . No es una fórmula distinta — es la misma regla.

**Ejemplo 1.**  $f(x) = x^7$

**Solución:**  $f'(x) = 7x^6$



**Ejemplo 2.**  $f(x) = x^{-3}$

**Solución:**  $f'(x) = -3x^{-4}$

**Ejemplo 3.**  $f(x) = 4x^5$

**Solución:**  $f'(x) = 20x^4$

**Ejemplo 4.**  $f(x) = \sqrt{x}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Ejemplo 5.**  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$



**Ejemplo 6.**  $f(x) = x^{100}$

**Solución:**  $f'(x) = 100x^{99}$

### Exponencial y logarítmica

| Función        | Derivada                  |
|----------------|---------------------------|
| $f(x) = e^x$   | $f'(x) = e^x$             |
| $f(x) = a^x$   | $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ |
| $f(x) = \ln x$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$     |

#### ⚠ Aviso importante

$e^x$  se deriva a sí misma — es la única función con esa propiedad. Es fácil «derivarla de más» cuando se combina con otras funciones (Bloque 3). De momento, quédate con que sola,  $e^x$  nunca cambia al derivar.

**Ejemplo 1.**  $f(x) = e^x$

**Solución:**  $f'(x) = e^x$



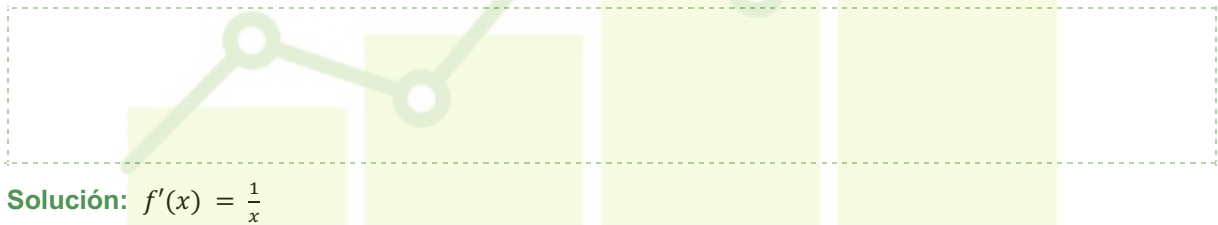
**Ejemplo 2.**  $f(x) = 2^x$

**Solución:**  $f'(x) = 2^x \ln 2$

**Ejemplo 3.**  $f(x) = 10^x$

**Solución:**  $f'(x) = 10^x \ln 10$

**Ejemplo 4.**  $f(x) = \ln x$



**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{x}$

**Ejemplo 5.**  $f(x) = 3^x$

**Solución:**  $f'(x) = 3^x \ln 3$

## Trigonómicas

| Función                | Derivada                 |
|------------------------|--------------------------|
| $f(x) = \text{sen } x$ | $f'(x) = \cos x$         |
| $f(x) = \cos x$        | $f'(x) = -\text{sen } x$ |
| $f(x) = \text{tg } x$  | $f'(x) = \sec^2 x$       |

### ! Cuidado con el signo

La derivada del coseno lleva un signo menos. Es el error más habitual!

**Ejemplo 1.**  $f(x) = \text{sen } x$

**Solución:**  $f'(x) = \cos x$

**Ejemplo 2.**  $f(x) = \cos x$

**Solución:**  $f'(x) = -\text{sen } x$

**Ejemplo 3.**  $f(x) = \text{tg } x$

**Solución:**  $f'(x) = \sec^2 x$



## 2.2. REGLAS DE COMBINACIÓN

La mayoría de las funciones reales no son un único término — son sumas, productos o cocientes de varias. Estas reglas dicen cómo combinarlas.

### Suma y resta

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Se deriva cada término por separado y se suman (o restan) los resultados. Es la regla más sencilla — no hay truco.

**Ejemplo 1.**  $f(x) = x^3 + \sin x - \ln x$

**Solución:**  $f'(x) = 3x^2 + \cos x - \frac{1}{x}$

**Ejemplo 2.**  $f(x) = 4x^2 - \cos x + 5$

**Solución:**  $f'(x) = 8x + \sin x$

**Ejemplo 3.**  $f(x) = 2^x + x^5 - \tan x$

**Solución:**  $f'(x) = 2^x \ln 2 + 5x^4 - \sec^2 x$



## Constante multiplicando a una función

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

La constante «sale» tal cual — solo se deriva la función que la acompaña.

**Ejemplo 1.**  $f(x) = 5x^4$

**Solución:**  $f'(x) = 20x^3$

**Ejemplo 2.**  $f(x) = -3 \operatorname{sen} x$



**Solución:**  $f'(x) = -3 \cos x$

**Ejemplo 3.**  $f(x) = 7 \ln x$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{7}{x}$

**Ejemplo 4.**  $f(x) = 10 e^x$

**Solución:**  $f'(x) = 10 e^x$

## Producto de dos funciones

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$



«Derivada del primero por el segundo sin derivar, más el primero sin derivar por la derivada del segundo». **ERROR**  $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$ .

**Ejemplo 1.**  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

**Solución:**  $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

**Ejemplo 2.**  $f(x) = x^3 \cdot \cos x$

**Solución:**  $f'(x) = 3x^2 \cdot \cos x - x^3 \cdot \sin x$



**Ejemplo 3.**  $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$

### Cociente de dos funciones

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$



*Truco para memorizarla: es casi igual que el producto, pero resta en vez de sumar, y el orden importa (primero la derivada del numerador). Todo se divide entre el denominador al cuadrado.*

**Ejemplo 1.**  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^5}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{x^5 \cdot \sec^2 x - \operatorname{tg} x \cdot 5x^4}{x^{10}}$

**Ejemplo 2.**  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4}$



**Ejemplo 3.**  $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$

## 2.3. ANTES DE DERIVAR: IDENTIFICA QUÉ TIENES DELANTE

Este es el paso que más se salta la gente con prisa — y el que más errores evita. Antes de aplicar ninguna fórmula, hazte estas preguntas en orden:

| Pregunta                                     | Si la respuesta es sí...                         |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| ¿Es una suma o resta de varios términos?     | Deriva cada término por separado (regla de suma) |
| ¿Hay una constante multiplicando a todo?     | Sácala fuera, deriva solo lo que queda           |
| ¿Son dos funciones multiplicándose?          | Regla del producto                               |
| ¿Es una fracción con función arriba y abajo? | Regla del cociente                               |
| ¿Es solo una función de la tabla básica?     | Aplica directamente la tabla (2.1)               |

Muchas funciones combinan varios pasos a la vez: primero identificas la estructura general (por ejemplo, «esto es una suma de dos términos»), y luego, dentro de cada término, vuelves a preguntarte lo mismo si hace falta.

**Ejemplo — proceso completo.**  $f(x) = x^3 \cdot e^x + \ln x$

**Solución:**  $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x + \frac{1}{x}$



*Estructura: es una suma de dos términos → el primero es un producto ( $x^3 \cdot e^x$ ), el segundo está en la tabla directa ( $\ln x$ ). Se deriva cada pieza y se suma.*



## 2.4. EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Progresión de nivel 1 (directas) a nivel 4 (mezcla de todo). Mismo formato: enunciado, espacio para resolver, solución debajo.

### Nivel 1 — Directas (tabla básica, un solo término)

**Ejercicio 1.**  $f(x) = x^8$

**Solución:**  $f'(x) = 8x^7$

**Ejercicio 2.**  $f(x) = \sqrt{x}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Ejercicio 3.**  $f(x) = e^x$

**Solución:**  $f'(x) = e^x$

**Ejercicio 4.**  $f(x) = \ln x$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{x}$



**Ejercicio 5.**  $f(x) = \cos x$

**Solución:**  $f'(x) = -\sin x$

**Ejercicio 6.**  $f(x) = 5^x$

**Solución:**  $f'(x) = 5^x \ln 5$

**Ejercicio 7.**  $f(x) = x^{-2}$

**Solución:**  $f'(x) = -2x^{-3}$

**Ejercicio 8.**  $f(x) = \operatorname{tg} x$

**Solución:**  $f'(x) = \sec^2 x$

## Nivel 2 — Combinaciones sencillas (suma y constante)

**Ejercicio 9.**  $f(x) = 4x^3 + \operatorname{sen} x$

**Solución:**  $f'(x) = 12x^2 + \cos x$

**Ejercicio 10.**  $f(x) = 5 \ln x - 2x^2$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{5}{x} - 4x$

**Ejercicio 11.**  $f(x) = 3e^x + \operatorname{tg} x$

**Solución:**  $f'(x) = 3e^x + \sec^2 x$

**Ejercicio 12.**  $f(x) = 2^x - 6x^4 + \cos x$

**Solución:**  $f'(x) = 2^x \ln 2 - 24x^3 - \operatorname{sen} x$



**Ejercicio 13.**  $f(x) = 8 \cdot \sqrt{x} + 3 \ln x$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x}$

### Nivel 3 — Producto y cociente

**Ejercicio 14.**  $f(x) = x^4 \cdot e^x$

**Solución:**  $f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x$

**Ejercicio 15.**  $f(x) = (x^2 - 3x)(\ln x - 2e^x)$

**Solución:**  $f'(x) = (2x - 3)(\ln x - 2e^x) + (x^2 - 3x)\left(\frac{1}{x} - 2e^x\right)$

**Ejercicio 16.**  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^5}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{x \cdot \sec^2 x - 5 \operatorname{tg} x}{x^6}$



**Ejercicio 17.**  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4}$

**Ejercicio 18.**  $f(x) = x^3 \cdot \sin x$

**Solución:**  $f'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$

**Ejercicio 19.**  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$

#### Nivel 4 — Mezcla de todo

**Ejercicio 20.**  $f(x) = x^4 \cdot e^x + \ln x$

**Solución:**  $f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x + \frac{1}{x}$

**Ejercicio 21.**  $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x - 5x^3$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot \sin x - 15x^2$

**Ejercicio 22.**  $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{e^x}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{(2x + \cos x - x^2 - \sin x)}{e^x}$

## BLOQUE 3 — REGLA DE LA CADENA

### 3.1. QUÉ ES UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Hasta ahora, en el Bloque 2, todas las funciones eran «de una sola capa»:  $x$  elevado a algo, el logaritmo de  $x$ , el seno de  $x$ . Pero muchas funciones están formadas por una función metida dentro de otra. A eso se le llama función compuesta.

Fíjate en la diferencia:  $\text{sen } x$  es directa (la tabla del Bloque 2 ya la resuelve), pero  $\text{sen}(2x)$  no — aquí el seno no actúa sobre  $x$ , actúa sobre « $2x$ ». Primero se calcula  $2x$ , y el resultado es lo que entra en el seno.

💡 *Piensa en ello como dos máquinas en cadena: la función de dentro procesa  $x$  primero, y su resultado es lo que recibe la función de fuera. Por eso se llama «composición» — una función compuesta con otra.*

#### Identifica: función externa y función interna

Antes de derivar nada, practica solo a identificar las dos capas:

| Función compuesta    | Externa (de fuera) | Interna (de dentro) |
|----------------------|--------------------|---------------------|
| $\text{sen}(2x)$     | $\text{sen}( )$    | $2x$                |
| $e^{2x}$             | $e^{( )}$          | $2x$                |
| $\ln(\text{sen}(x))$ | $\ln( )$           | $\text{sen}(x)$     |
| $(x^2 + 1)^5$        | $( )^5$            | $x^2 + 1$           |

### 3.2. LA REGLA DE LA CADENA

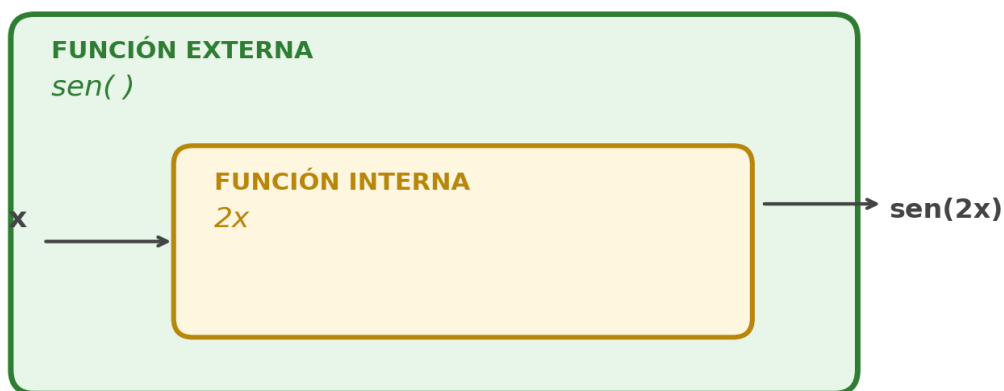
Para derivar una función compuesta, se derivan las dos capas por separado y se multiplican:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

💡 *Truco para aplicarla sin pelearte con la notación: «derivada de la de fuera (evaluada en lo de dentro, sin tocarlo)  $\times$  derivada de lo de dentro». Tres pasos, siempre en el mismo orden: (1) identifica fuera/dentro, (2) deriva la de fuera dejando lo de dentro tal cual, (3) multiplica por la derivada de lo de dentro.*



## Cómo se deriva una función compuesta



$$h'(x) = \cos(2x) \cdot 2 \quad \leftarrow \text{deriva fuera (dejando dentro igual)} \times \text{deriva dentro}$$

*Las dos capas de una función compuesta y cómo se deriva cada una.*

### Primer ejemplo, paso a paso

Deriva  $h(x) = \text{sen}(2x)$

- 1) Identificamos: la de fuera es el seno, la de dentro es  $2x$ .
- 2) Derivamos la de fuera dejando  $2x$  tal cual:  $\cos(2x)$ .
- 3) Multiplicamos por la derivada de dentro: la derivada de  $2x$  es  $2$ .

**Resultado:**  $h'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2 \cos(2x)$

### 3.3. PROGRESIÓN DE EJEMPLOS

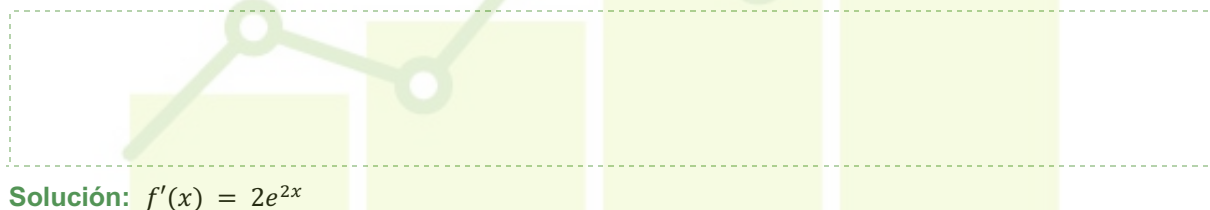
**Ejemplo 1.**  $f(x) = \text{sen}(2x)$

**Solución:**  $f'(x) = 2 \cos(2x)$

**Ejemplo 2.**  $f(x) = \cos(3x)$

**Solución:**  $f'(x) = -3 \text{sen}(3x)$

**Ejemplo 3.**  $f(x) = e^{2x}$



**Solución:**  $f'(x) = 2e^{2x}$

**Ejemplo 4.**  $f(x) = e^{x+1}$

**Solución:**  $f'(x) = e^{x+1}$



**Ejemplo 5.**  $f(x) = \text{sen}(x^3)$

**Solución:**  $f'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$

**Ejemplo 6.**  $f(x) = \ln(\text{sen}(2x))$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{2 \cos(2x)}{\text{sen}(2x)}$

**Ejemplo 7.**  $f(x) = \text{sen}(\cos x)$

**Solución:**  $f'(x) = -\text{sen } x \cdot \cos(\cos x)$

**Ejemplo 8.**  $f(x) = 2 \ln(\text{tg } x)$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{2 \sec^2 x}{\text{tg } x}$

💡 Fíjate que en los ejemplos 6, 7 y 8 se deriva primero la función de fuera ( $\ln$ ,  $\text{sen}$ ,  $\ln$ ), se deja lo de dentro tal cual, y se multiplica por la derivada de dentro.



### Combinada con reglas que ya conoces (producto)

La regla de la cadena no sustituye a las del Bloque 2 — se combina con ellas. Cuando dentro de un producto o un cociente aparece una función compuesta, simplemente se deriva esa pieza con la cadena y el resto igual que siempre.

**Ejemplo 1.**  $f(x) = x^4 \cdot e^{x+1}$

**Solución:**  $f'(x) = 4x^3 \cdot e^{x+1} + x^4 \cdot e^{x+1}$

**Ejemplo 2.**  $f(x) = 5^{\ln x}$

**Solución:**  $f'(x) = 5^{\ln x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{x}$

#### ⚠ Este último es el más traicionero

$5^{\ln x}$  parece una potencia normal, pero el exponente ( $\ln x$ ) es una función — así que hay que aplicar regla de la cadena. Se deriva como exponencial  $a^{g(x)}$ : la propia función por  $\ln(5)$  por la derivada del exponente.



### 3.4. EJERCICIOS PARA PRACTICAR

#### Nivel 1 — Composición simple (potencia, exponencial, logaritmo)

**Ejercicio 1.**  $f(x) = \text{sen}(5x)$

**Solución:**  $f'(x) = 5 \cos(5x)$

**Ejercicio 2.**  $f(x) = e^{3x}$

**Solución:**  $f'(x) = 3 e^{3x}$

**Ejercicio 3.**  $f(x) = \ln(3x)$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{1}{x}$

**Ejercicio 4.**  $f(x) = (2x + 1)^5$

**Solución:**  $f'(x) = 10(2x + 1)^4$

## Nivel 2 — La parte de dentro ya no es lineal

**Ejercicio 5.**  $f(x) = \sin(x^2)$

**Solución:**  $f'(x) = 2x \cos(x^2)$

**Ejercicio 6.**  $f(x) = e^{x^2}$

**Solución:**  $f'(x) = 2x e^{x^2}$

**Ejercicio 7.**  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

**Ejercicio 8.**  $f(x) = \tan(3x)$

**Solución:**  $f'(x) = 3 \sec^2(3x)$



### Nivel 3 — Composición anidada (dos capas de «dentro»)

**Ejercicio 9.**  $f(x) = \text{sen}(\cos(2x))$

**Solución:**  $f'(x) = -2 \text{sen}(2x) \cdot \cos(\cos(2x))$

**Ejercicio 10.**  $f(x) = \ln(\text{sen}(3x))$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{3 \cos(3x)}{\text{sen}(3x)}$

**Ejercicio 11.**  $f(x) = e^{\text{sen } x}$

**Solución:**  $f'(x) = e^{\text{sen } x} \cdot \cos x$

**Ejercicio 12.**  $f(x) = \cos \sqrt{x}$

**Solución:**  $f'(x) = -\text{sen} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$



## Nivel 4 — Combinada con producto y cociente

**Ejercicio 13.**  $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$

**Solución:**  $f'(x) = 2x \cdot e^{3x} + x^2 \cdot 3e^{3x}$

**Ejercicio 14.**  $f(x) = \frac{\text{sen}(2x)}{x}$

**Solución:**  $f'(x) = \frac{2x \cos(2x) - \text{sen}(2x)}{x^2}$

**Ejercicio 15.**  $f(x) = 3^{x^2}$

**Solución:**  $f'(x) = 3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x$

**Ejercicio 16.**  $f(x) = x^3 \cdot \ln(x^2 + 1)$

**Solución:**  $f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x^2 + 1) + x^3 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$

