

CORRECCIÓN EX MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

GRADO ECO UNED — EXAMEN FEBRERO 2026 S1

Pregunta 1: Optimización con restricción de igualdad

Una empresa produce dos productos x e y . Su beneficio viene dado por $B(x, y) = 40x + 30y - 2x^2 - y^2$. La producción está limitada por los recursos de forma que $2x + y = 100$. Encuentra los valores de x e y que maximizan el beneficio sujeto a la restricción.

Versión 1: Resolución por sustitución

$$\text{Max : } B(x, y) = 40x + 30y - 2x^2 - y^2$$

$$\text{Se : } 2x + y = 100 \longrightarrow y = 100 - 2x$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 40x + 30(100 - 2x) - 2x^2 - (100 - 2x)^2 = \\ &= 40x + 3000 - 60x - 2x^2 - 100^2 - 2^2x^2 + 400x = \\ &= \underline{40x} + 3000 - \underline{60x} - \underline{2x^2} - 10000 - \underline{4x^2} + \underline{400x} = \\ &= -6x^2 + 380x - 7000 \end{aligned}$$

$$B(x) = -6x^2 + 380x - 7000$$

$$B'(x) = -12x + 380 = 0 \longrightarrow x = \frac{380}{12} = \frac{95}{3}$$

$$B''(x) = -12 < 0 \longrightarrow \text{máximo}$$

$$x = \frac{95}{3}$$

$$y = 100 - 2 \cdot \frac{95}{3} = \frac{110}{3}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{95}{3} \\ y &= \frac{110}{3} \end{aligned}$$

$$B\left(\frac{95}{3}, \frac{110}{3}\right) = 40 \cdot \frac{95}{3} + 30 \cdot \frac{110}{3} - 2\left(\frac{95}{3}\right)^2 - \left(\frac{110}{3}\right)^2 = \frac{-2950}{3}$$



Versión 2: Resolución por Lagrange

Planteamos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 40x + 30y - 2x^2 - y^2 + \lambda(2x + y - 100)$$

Condiciones necesarias (derivadas parciales iguales a cero):

$$\mathcal{L}'_x = 40 - 4x + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2x - 20$$

$$\mathcal{L}'_y = 30 - 2y + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2y - 30$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = 2x + y - 100 = 0$$

Igualemos λ :

$$2x - 20 = 2y - 30 \Rightarrow x = y - 5$$

Sustituimos en la restricción:

$$2(y - 5) + y = 100 \Rightarrow 3y = 110 \Rightarrow y = \frac{110}{3}$$

$$x = \frac{110}{3} - 5 = \frac{95}{3}, \quad \lambda = \frac{130}{3}$$

Condición suficiente (Hessiana orlada). Como $n = 2$ variables y $m = 1$ restricción, hay que analizar $n - m = 1$ orlado:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} \\ g'_y & \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 4 = 12$$

Como $\overline{H} = 12 > 0$, el punto obtenido **maximiza** la función objetivo.

$$x = \frac{95}{3}, y = \frac{110}{3}, B_{\max} = -\frac{2950}{3} \approx -983,33$$

Nota. El óptimo libre de B sería $x = 10, y = 15$, que solo consume $2(10) + 15 = 35$ unidades de recurso. La restricción obliga a consumir 100, es decir, a sobreproducir muy por encima del óptimo, y por eso el beneficio resultante es negativo. Además, al pasar la constante de la restricción de 100 a 101 el efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo sería aproximadamente $-\lambda = -\frac{130}{3} \approx -43,33$.



Pregunta 2: Maximización con Kuhn-Tucker

Resuelva el siguiente problema de maximización usando el método de Kuhn-Tucker: Maximizar $2xy$ sujeto a las restricciones $2x + 3y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2xy + \lambda(2x + 3y - 90)$$

$$\mathcal{L}'_x = 2y + 2\lambda \leq 0 \quad (1) \quad y \quad 2y + 2\lambda = 0 \quad (3) \quad \text{si } x > 0$$

$$\mathcal{L}'_y = 2x + 3\lambda \leq 0 \quad (2) \quad y \quad 2x + 3\lambda = 0 \quad (4) \quad \text{si } y > 0$$

$$\lambda(2x + 3y - 90) = 0$$

$$2x + 3y \leq 90$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$\lambda \leq 0$$

$$\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} y \neq 0 & (1) \\ x \neq 0 & (2) \end{cases} \quad \text{No cumple}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ si } \lambda < 0 & \begin{cases} (3) \ 2y + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2y}{2} = -y \\ (4) \ 2x + 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2x}{3} \end{cases} \\ \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} & \begin{cases} +y = +\frac{2x}{3} \\ +3y = +2x \end{cases} \\ & \begin{matrix} 2x + 3y = 90 \\ \rightarrow 2x + 3\left(\frac{2x}{3}\right) = 90 \\ 2x + 2x = 90 \rightarrow 4x = 90 \rightarrow x = 22\frac{1}{2} \\ y = 15 = \frac{2 \cdot 22\frac{1}{2}}{3} \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda < 0 & \begin{cases} 2x + 3y = 90 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow 2 \cdot 0 + 3y = 90 \rightarrow y = \frac{90}{3} = 30 > 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + 3\lambda = 0 \\ 2 \cdot 0 + 3\lambda = 0 \end{cases} \\ & \lambda \neq 0 \rightarrow \text{No cumple} \end{aligned}$$

Solución: $\boxed{x = 22\frac{1}{2}} \\ \boxed{y = 15}$

valor máximo
 $f(22\frac{1}{2}, 15) = 2 \cdot 22\frac{1}{2} \cdot 15 = 675$



Pregunta 3: EDO lineal de primer orden

Resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}$

$$y' + 3y = e^{-x} \quad \begin{cases} P(x) = 3 \\ Q(x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$\int P(x) dx = \int 3 dx = 3x + C$$

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right] = \\ &= e^{-3x} \left[\int \overbrace{e^{-x} \cdot e^{3x}}^{e^{2x}} dx + C \right] = \\ &= e^{-3x} \left[\frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx + C \right] = \\ &= e^{-3x} \left[\frac{1}{2} (e^{2x} + C) \right] = \frac{1}{2} \underbrace{e^{-3x} \cdot e^{2x}}_{e^{-x}} + \frac{1}{2} \overbrace{C}^k e^{-3x} = \\ &= \frac{e^{-x}}{2} + k e^{-3x} \end{aligned}$$

$$y = \frac{e^{-x}}{2} + k e^{-3x}$$

Pregunta 4: EDO lineal de segundo orden

Obtener la solución completa de la ecuación diferencial: $y'' + 4y = e^{2x}$

Solución homogénea : $\lambda^2 + 4 = 0$

$$\lambda^2 = -4 \rightarrow \lambda = \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{array} \right\}$$

$$y_h = e^{\overset{=0}{\alpha}x} \overset{e^0=1}{\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sen \beta x \right)} = C_1 \cos 2x + C_2 \sen 2x$$

Solución particular

$$y_p = A e^{2x} \quad (\lambda = 2 \text{ no es solución homogénea})$$

$$y_p' = A e^{2x} \cdot 2 = 2A e^{2x}$$

$$y_p'' = 2A e^{2x} \cdot 2 = 4A e^{2x}$$

$$4A e^{2x} + 4A e^{2x} = e^{2x}$$

$$8A e^{2x} = 1 e^{2x} \rightarrow 8A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{8}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sen 2x + \frac{1}{8} e^{2x}$$

Pregunta 5: Sistema de ecuaciones en diferencias

Calcular la solución general del siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$$

$$6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda_1 = 1 &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{aligned} 2a - 2b &= 0 \\ 2a &= 2b \\ a &= b \end{aligned} \\ &\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda_2 = 4 &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{aligned} -c - 2d &= 0 \\ c &= -2d \end{aligned} \\ &\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución homogénea:

$$y_x^h = c_1 1^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 4^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 4^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$B(x)$	Forma de Y_p	Condición
B (constante = $B \cdot 1^x$)	K (constante)	$\lambda = 1$ no es raíz
B (constante = $B \cdot 1^x$)	$ax + b$	$\lambda = 1$ es raíz simple
B (constante = $B \cdot 1^x$)	$ax^2 + bx$	$\lambda = 1$ es raíz doble
$B \cdot m^x$	$K \cdot m^x$	m no es raíz
$B \cdot m^x$	$Kx \cdot m^x$	m es raíz simple

$$y_x^p = \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix} \quad y_{x+1}^p = \begin{pmatrix} A(x+1) + B \\ C(x+1) + D \end{pmatrix}$$

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A(x+1) + B \\ C(x+1) + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax + B \\ Cx + D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad Ax + A + B = 3Ax + 3B - 2Cx - 2D + 1$$

$$\begin{cases} Ax + (A+B) = (3A-2C)x + (3B-2D+1) \\ A = 3A - 2C \rightarrow A = C \\ A + B = 3B - 2D + 1 \\ A - 2B + 2D = 1 \end{cases}$$

$$2) \quad Cx + C + D = -Ax - B + 2Cx + 2D + 3$$

$$\begin{cases} Cx + (C+D) = (-A+2C)x + (-B+2D+3) \\ C = -A + 2C \\ C + D = -B + 2D + 3 \\ C + B - D = 3 \end{cases}$$

$$A - 2B + 2(A + B - 3) = 1$$

$$A - 2B + 2A + 2B - 6 = 1 \rightarrow 3A = 7 \rightarrow A = \frac{7}{3} = C$$

$$D = C + B - 3$$

$$B = 0 \rightarrow D = \frac{7}{3} - 3 = -\frac{2}{3}$$

$$y_x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 4^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{3}x \\ \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$