

CORRECCIÓN EX MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA LA ECONOMÍA

GRADO ECO UNED — EXAMEN FEBRERO 2026 S1

Pregunta 1: Optimización con restricción de igualdad

Una empresa produce dos productos x e y . Su beneficio viene dado por $B(x, y) = 40x + 30y - 2x^2 - y^2$. La producción está limitada por los recursos de forma que $2x + y = 100$. Encuentra los valores de x e y que maximizan el beneficio sujeto a la restricción.

Versión 1: Resolución por sustitución

De la restricción despejamos y :

$$2x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$$

Sustituimos en la función de beneficio:

$$B(x) = 40x + 30(100 - 2x) - 2x^2 - (100 - 2x)^2$$

$$B(x) = 40x + 3000 - 60x - 2x^2 - 10000 + 400x - 4x^2 = -6x^2 + 380x - 7000$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$B'(x) = -12x + 380 = 0 \Rightarrow x = \frac{380}{12} = \frac{95}{3}$$

Condición suficiente (segunda derivada):

$$B''(x) = -12 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Recuperamos y :

$$y = 100 - 2 \cdot \frac{95}{3} = \frac{110}{3}$$

Beneficio máximo:

$$B\left(\frac{95}{3}, \frac{110}{3}\right) = -6\left(\frac{95}{3}\right)^2 + 380 \cdot \frac{95}{3} - 7000 = \frac{18050}{3} - 7000 = -\frac{2950}{3}$$

$$x = \frac{95}{3}, y = \frac{110}{3}, B_{\max} = -\frac{2950}{3} \approx -983,33$$



Versión 2: Resolución por Lagrange

Planteamos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 40x + 30y - 2x^2 - y^2 + \lambda(2x + y - 100)$$

Condiciones necesarias (derivadas parciales iguales a cero):

$$\mathcal{L}'_x = 40 - 4x + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2x - 20$$

$$\mathcal{L}'_y = 30 - 2y + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2y - 30$$

$$\mathcal{L}'_\lambda = 2x + y - 100 = 0$$

Igualemos λ :

$$2x - 20 = 2y - 30 \Rightarrow x = y - 5$$

Sustituimos en la restricción:

$$2(y - 5) + y = 100 \Rightarrow 3y = 110 \Rightarrow y = \frac{110}{3}$$

$$x = \frac{110}{3} - 5 = \frac{95}{3}, \quad \lambda = \frac{130}{3}$$

Condición suficiente (Hessiana orlada). Como $n = 2$ variables y $m = 1$ restricción, hay que analizar $n - m = 1$ orlado:

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} \\ g'_y & \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 4 = 12$$

Como $\overline{H} = 12 > 0$, el punto obtenido **maximiza** la función objetivo.

$$x = \frac{95}{3}, y = \frac{110}{3}, B_{\max} = -\frac{2950}{3} \approx -983,33$$

Nota. El óptimo libre de B sería $x = 10, y = 15$, que solo consume $2(10) + 15 = 35$ unidades de recurso. La restricción obliga a consumir 100, es decir, a sobreproducir muy por encima del óptimo, y por eso el beneficio resultante es negativo. Además, al pasar la constante de la restricción de 100 a 101 el efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo sería aproximadamente $-\lambda = -\frac{130}{3} \approx -43,33$.



Pregunta 2: Maximización con Kuhn-Tucker

Resuelva el siguiente problema de maximización usando el método de Kuhn-Tucker: Maximizar $2xy$ sujeto a las restricciones $2x + 3y \leq 90$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Justificación del método: el problema pide **maximizar** con restricciones de **desigualdad** → aplicamos Kuhn-Tucker.

Damos por supuesto que todos los puntos de la región factible son regulares.

Observación previa (simplifica el problema): si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $2xy = 0$, y es obvio que ahí no se maximiza $2xy$, porque cualquier punto con $x > 0$, $y > 0$ factible da un valor positivo. Luego debe ser $x > 0$ e $y > 0$, y las restricciones de no negatividad **no** están activas. Basta entonces trabajar con un único multiplicador.

Restricción en forma estándar $g \leq 0$:

$$g(x, y) = 2x + 3y - 90 \leq 0$$

Lagrangiano (para maximización se **suman** las restricciones, con $\lambda \leq 0$):

$$\mathcal{L} = 2xy + \lambda(2x + 3y - 90)$$

Condiciones necesarias de Kuhn-Tucker (para $x > 0$, $y > 0$):

$$\mathcal{L}'_x = 2y + 2\lambda = 0$$

$$\mathcal{L}'_y = 2x + 3\lambda = 0$$

$$\lambda(2x + 3y - 90) = 0$$

$$2x + 3y \leq 90; \quad x > 0; \quad y > 0; \quad \lambda \leq 0$$

Caso 1: $\lambda = 0$ (restricción no activa)

De (I): $2y = 0 \Rightarrow y = 0$. De (II): $2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Contradice $x > 0$, $y > 0$. Luego λ **no** puede ser cero. ×



Caso 2: $\lambda \neq 0$ (restricción activa)

Por (III), $2x + 3y - 90 = 0$. De (I) y (II):

$$y = -\lambda, \quad x = -\frac{3\lambda}{2}$$

Sustituimos en la restricción activa:

$$2\left(-\frac{3\lambda}{2}\right) + 3(-\lambda) = 90 \Rightarrow -6\lambda = 90 \Rightarrow \lambda = -15 \leq 0 \checkmark$$

$$x = \frac{45}{2}, \quad y = 15$$

Ambos positivos, luego el punto es admisible. $\checkmark$

$$f(45/2, 15) = 2 \cdot 45/2 \cdot 15 = 675$$

Comparación:

Caso	Punto	$f(x, y)$	¿Válido?
1 ($\lambda = 0$)	—	—	No
2 ($\lambda = -15$)	$(45/2, 15)$	675	Sí

Máximo: $f = 675$ en $(x, y) = \left(\frac{45}{2}, 15\right) = (22,5; 15)$, con $\lambda = -15$

Pregunta 3: EDO lineal de primer orden

Resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}$

Identificación. La ecuación tiene la forma $y' + P(x)y = Q(x)$

con $P(x) = 3$ y $Q(x) = e^{-x}$.

No es de variables separables, porque el segundo miembro depende de x mientras que y aparece sumando; por tanto aplicamos el método de la EDO lineal de primer orden.

Paso 1: Calculamos $\int P(x) dx$:

$$\int P(x) dx = \int 3 dx = 3x$$

Paso 2: Aplicamos la fórmula:

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C \right]$$

Paso 3: Sustituimos:

$$y = e^{-3x} \left[\int e^{-x} \cdot e^{3x} dx + C \right] = e^{-3x} \left[\int e^{2x} dx + C \right]$$

Paso 4: Resolvemos la integral:

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

Paso 5: Volvemos a la expresión de y :

$$y = e^{-3x} \left[\frac{e^{2x}}{2} + C \right] = \frac{e^{-x}}{2} + C e^{-3x}$$

Pregunta 4: EDO lineal de segundo orden

Obtener la solución completa de la ecuación diferencial: $y'' + 4y = e^{2x}$



Solución homogénea

$y'' + 4y = 0$. Ecuación característica:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

Raíces complejas conjugadas $\lambda = \alpha \pm \beta i$ con $\alpha = 0$ y $\beta = 2$. Por tanto:

$$y_h = e^{0 \cdot x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Solución particular

El término independiente es e^{2x} , del tipo e^{kx} con $k = 2$.

Como 2 **no** es raíz y **no** hay que multiplicar por x .

Proponemos entonces:

$$y_p = A e^{2x}, \quad y_p' = 2A e^{2x}, \quad y_p'' = 4A e^{2x}$$

Sustituimos en la EDO:

$$4A e^{2x} + 4A e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{8} e^{2x}$$

Pregunta 5: Sistema de ecuaciones en diferencias

Calcular la solución general del siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Paso 1: Autovalores de A

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4$$

Paso 2: Autovectores

Para $\lambda_1 = 1$: $(A - I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 4$: $(A - 4I)v = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Solución homogénea

$$Y_h = C_1 \cdot 1^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot 4^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot 4^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Solución particular

Tabla de elección de solución particular (ecuaciones en diferencias):

$B(x)$	Forma de Y_p	Condición
B (constante = $B \cdot 1^x$)	K (constante)	$\lambda = 1$ no es raíz
B (constante = $B \cdot 1^x$)	$ax + b$	$\lambda = 1$ es raíz simple
B (constante = $B \cdot 1^x$)	$ax^2 + bx$	$\lambda = 1$ es raíz doble
$B \cdot m^x$	$K \cdot m^x$	m no es raíz
$B \cdot m^x$	$Kx \cdot m^x$	m es raíz simple

El término independiente es el vector constante B , equivalente a $B \cdot 1^x$. Como $\lambda_1 = 1$ **sí** es autovalor (raíz simple), una constante no sirve: hay que subir un grado.

Proponemos:

$$Y_p = \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix}, \quad Y_{p,x+1} = \begin{pmatrix} ax + a + b \\ cx + c + d \end{pmatrix}$$

Sustituimos en $Y_{x+1} = AY_x + B$:



$$\begin{pmatrix} ax + a + b \\ cx + c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3a - 2c)x + (3b - 2d + 1) \\ (-a + 2c)x + (-b + 2d + 3) \end{pmatrix}$$

Iguamos coeficientes de x :

$$a = 3a - 2c \Rightarrow a = c \quad ; \quad c = -a + 2c \Rightarrow a = c$$

Iguamos términos independientes (con $c = a$):

$$a + b = 3b - 2d + 1 \Rightarrow a - 2b + 2d = 1$$

$$a + d = -b + 2d + 3 \Rightarrow a + b - d = 3$$

De (II): $d = a + b - 3$. Sustituimos en (I):

$$a - 2b + 2(a + b - 3) = 1 \Rightarrow 3a - 6 = 1 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

$$c = \frac{7}{3}, \quad d = b - \frac{2}{3}$$

Tomamos $b = 0$: la constante libre se absorbe en la homogénea, ya que $\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ es múltiplo del autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ asociado a $\lambda_1 = 1$.

$$Y_p = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}x \\ \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Comprobación. La primera fila de $AY_p + B$ da $3(\frac{7}{3}x) - 2(\frac{7}{3}x - \frac{2}{3}) + 1 = 7/3 x + 7/3 = 7/3 (x + 1) \checkmark$

$$Y_x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot 4^x \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{3}x \\ \frac{7}{3}x - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$