Ejercicios

1. Los vectores del espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$)

$a = (2, 3, -1)$, $b = (1, 2, -1)$ y $c = (1, -1, 2)$

¿Forman una base de dicho espacio? $\longrightarrow$ NO, porque son dependientes

$H = \{(2,3,-1), (1,2,-1), (1,-1,2)\}$

Teóricamente tendríamos que ver:

1) Forman un sistema generador
2) Son linealmente independientes

$\Big\}$ base

→ libro: Todas las bases un espacio vectorial tienen el mismo nº de vectores

En $\mathbb{R}^3$ todas las bases tendrán tres vectores que serán independientes

Para comprobar que un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ formen una base tendremos que ver que su rango coincide con el nº de coordenadas de dichos vectores

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ las bases estarán formadas por 3 vectores independientes

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

$a = (2, 3, -1)$, $b = (1, 2, -1)$ y $c = (1, -1, 2)$

¿Son independientes? Sí ⇒ forman una base; No ⇒ No forman una base.

Rango de ese conjunto debe ser 3 (nº de vectores)

Gauss

$$c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NO

$F_2 - 2F_1$
$F_3 - F_1$

$5F_3 - 3F_2$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ \hline 0 & 5 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 15 & -15 \\ 0 & -15 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Si alguna fila aparece con todos sus términos iguales a cero entonces los vect. serán dependientes

Como son dependientes ⇒ No forman una base

Otro método (para ver si son indep.)

Ver si determinante formado por dichos vectores es $\neq 0$. Si Det $\neq 0$ ⇒ Indep.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 1 + 8 - (6 - 2 + 2) = 6 - 6 = 0$$

Si det = 0 ⇒ los vect. son dependientes y si son dependientes entonces no forman una base

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

2. El mismo problema anterior para los vectores del espacio tetradimensional: $\mathbb{R}^4$

$a=(1,1,1,1)$, $b=(1,2,3,0)$, $c=(1,3,5,-1)$
y $d=(1,4,7,-2)$

¿forman una base?

Como estamos en $\mathbb{R}^4$ las bases deberán tener 4 vectores independientes

- 4 vectores
- ¿Son indep?
  - Gauss → más claro ($\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, ...)
  - determinante (más rápido) ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{array}{c} \\ \\ c \rightarrow \\ d \rightarrow \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 7 & -2 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NO

F_2-F_1
F_3-F_1
F_4-F_1

F_3-2F_2
F_4-3F_2

Gauss
↓
príncipe matemáticas

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Los vectores a, b, c y d son dependientes

no forman una base.

Para que formaran una base debería quedar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
↓
Indep.

3. Comprobar que los vectores

$a = (2, 3, 1)$, $b = (3, 1, 2)$ y $c = (0, 2, -1)$

constituyen una base del espacio tridimensional.

todas las bases de $\mathbb{R}^3$ han de tener tres vectores independientes, con comprobar que los vectores a, b y c son independientes automaticamente formarían una base.

Para comprobar que son independiente, tengo que ver que su determinante es distinto de cero

¿ $\det(a, b, c) \neq 0$?

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \overbrace{2\cdot 1\cdot(-1)} + \overbrace{3\cdot 2\cdot 0} + \overbrace{3\cdot 2\cdot 1} - \left(\overbrace{1\cdot 1\cdot 0} + \overbrace{3\cdot 3\cdot(-1)} + \overbrace{2\cdot 2\cdot 2}\right)$$

$$= -2 + 0 + 6 - (0 - 9 + 8) = 4 - (-1) = 5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det(a, b, c) = 5 \neq 0$; los vectores a, b y c son independientes luego forman una base de $\mathbb{R}^3$

4. Expresar el vector $(2, -1, 3)$ en la base del ejercicio anterior.

- $a = (2, 3, 1)$, $b = (3, 1, 2)$ y $c = (0, 2, -1)$

v = (2, -1, 3) en la base formada por los vectores a, b y c.

Vimos det(a, b, c) ≠ 0 luego formaban una base del espacio $\mathbb{R}^3$

$$(2, -1, 3) = x(2, 3, 1) + y(3, 1, 2) + z(0, 2, -1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 2x + 3y + 0z \\ -1 &= 3x + 1y + 2z \\ 3 &= 1x + 2y - 1z \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & \text{Ind.} \end{array} \end{array}$$

¿x, y, z?

$$F_1 \leftrightarrow F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$F_2 - 3F_1$

$F_3 - 2F_1$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 & -9 \\ \hline 0 & -5 & 5 & -10 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ \hline 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & +5 & -10 \end{array}\right)$$

$5F_3 - F_2$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 5 & 10 & -20 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & +5 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x + 2y - z = 3 \\ \to 5y + 5z = -10 \\ \to +5z = -10 \ * \end{array}$$

$$\boxed{z = \frac{-10}{5} = -2}$$

$$5y + \overbrace{5(-2)} = -10; \quad 5y - 10 = -10; \quad 5y = 0;$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$x + 2.0 - (-2) = 3; \quad x + 0 + 2 = 3; \quad \boxed{x = 1}$$

$$(2, -1, 3) = 1(2, 3, 1) + 0(3, 1, 2) - 2(0, 2, -1)$$
$$= (2, 3, 1) + (0, 0, 0) - (0, 4, -2)$$
$$= (2, -1, 3)$$

$$\boxed{v = 1.a + 0.b - 2c}$$

5. Dados los vectores del espacio tetradimensional $\mathbb{R}^4$

$a = (1, 1, 1, 1)$,
$b = (1, 2, 3, 4)$,
$c = (-1, 0, 1, 2)$,
$d = (-1, 2, 5, 8)$

$\left.\right\}$ de $\mathbb{R}^4$

determinar la dimensión del subespacio vectorial engendrado por ellos.

dimensión = nº vect. forman la base del subespacio
‖
nº vectores sean Linealmente independiente.

Gauss: → Cuántos vect. hay l. indep.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$F_2 - F_1$
$F_3 + F_1$
$F_4 + F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$F_3 - F_2$
$F_4 - 3F_2$

Como quedan 2 filas $\neq 0 \Rightarrow$ hay dos vect indep.
luego la dimensión del subespacio formado por los 4 vectores será: 2

6. Hallar una base del subespacio vectorial del espacio anterior.

$a = (1, 1, 1, 1),$

$b = (1, 2, 3, 4),$

Una base del subespacio podría ser:

$R = \{(1,1,1,1), (1,2,3,4)\}$

También podría ser

$R' = \{(1,1,1,1), (0,1,2,3)\}$

7. Hallar las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal engendrada por los vectores en el ejercicio anterior. → subespacio

$K = \{ (1,1,1,1), (1,2,3,4) \}$ formar un Subesp de $\mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) = \lambda (1,1,1,1) + \beta (1,2,3,4)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda + \beta \\ y &= \lambda + 2\beta \\ z &= \lambda + 3\beta \\ t &= \lambda + 4\beta \end{aligned}\right\} \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

→ Ecuaciones paramétricas del subespacio engendrado por la base K.

INFO@ADEFACIL.COM | 600 816 978 |

8. El vector $(x_1, x_2, 0, 1)$ pertenece a la variedad lineal engendrada por los vectores del ejercicio 5: hallar x_1 y x_2.

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda + \beta \\ y &= \lambda + 2\beta \\ \rightarrow z &= \lambda + 3\beta \\ \rightarrow t &= \lambda + 4\beta \end{aligned}\right\} \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas o subesp. engendrado por $\underline{\underline{K}}$ //

$(x_1, x_2, 0, 1) \Rightarrow$ ¿ x_1, x_2 si sabemos $x_3 = 0$, $x_4 = 1$?

$x \quad y \quad z \quad t$

$\Rightarrow$ Resp: Sí.

$$\left.\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow \lambda + 3\beta = 0 \\ t = 1 &\Rightarrow \lambda + 4\beta = 1 \end{aligned}\right\} \text{ despejar } \lambda \text{ y } \beta$$

$$\begin{aligned} \lambda + 3\beta &= 0 \\ (-1) \quad -\lambda - 4\beta &= -1 \\ \hline / \quad -\beta &= -1 \Rightarrow \boxed{\beta = 1} \end{aligned}$$

// ; $\lambda + 3 \cdot 1 = 0$

$\boxed{\lambda = -3}$ //

Si $\beta = 1$ y $\lambda = -3$

$$\left.\begin{aligned} x &= \lambda + \beta \\ y &= \lambda + 2\beta \\ z &= \lambda + 3\beta \\ t &= \lambda + 4\beta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= -3+1 = -2 \\ y &= -3+2\cdot 1 = -1 \\ z &= -3+3\cdot 1 = 0 \\ t &= -3+4\cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

vector $(-2, -1, 0, 1)$

Pedían calcular
$x_1 = -2$
$x_2 = -1$

se sabían