INFO@ADEFACIL.COM

1.1 Introducción

Los vectores y las matrices desempeñan un papel fundamental en la literatura económica , hasta el punto de ser herramientas imprescindibles para cualquier economista.

Los vectores y las matrices se usan intensamente tanto en el análisis económico como en los modelos económicos. Pero para abordar el tratamiento de los vectores es necesario asociar el concepto de vector a una estructura concreta denominada **Espacio vectorial** y es ahí donde definiremos las operaciones entre vectores, leyes de composición… etc

1.1.1 Conjuntos , operaciones con conjuntos y correspondencias

1.1.1.1 Noción de conjunto

Se suele asociar de manera coloquial la idea de conjunto a una colección de objetos . Presentaremos aquí la definición dada por **Bourbaki :**

“ Un conjunto está formado por elementos susceptibles de poseer ciertas propiedades y de mantener ciertas relaciones entre ellos o con elementos de otros conjuntos “ .

Desde un punto de vista matemático, lo que hace que una colección cualquiera sea considerada como un conjunto es que se pueda afirmar que un elemento pertenece o no a él. Denotáremos los elementos del conjunto con letras minúsculas mientras a que los conjuntos los denotaremos con mayúsculas.

indica que el elemento **x pertenece al conjunto A** . $x \in A$

Para definir un conjunto se puede hacer :

- **Enumerando todos y cada uno de los elementos que lo forman**

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- **Dando las propiedades que han de cumplir todos los elementos que lo forman**

$A = \{x \in \mathbb{N} / \ 1 \leq x \leq 5\}$

1.1.1.2 Inclusión

Diremos que un conjunto **A** está incluido o es un **subconjunto** de otro conjunto **B** si todos los elementos de **A** están en el conjunto **B**

$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subset B$

La inclusión cumple las siguientes propiedades

- **A< A , propiedad reflexiva**
- **El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto**
- **Si A<B y B< C entonces A<C. Propiedad transitiva**
- **Si A< B y B< A entonces A y B son iguales . Propiedad simétrica**

Daremos dos definiciones más :

Definiremos **el cardinal de un conjunto** como el número de elementos que tiene dicho conjunto.
Definiremos **el conjunto de las partes de un conjunto** como todos los subconjuntos que podemos obtener de dicho conjunto . Diremos que el conjunto de las partes de un conjunto tiene **2^n elementos**

El número de partes del conjunto

$$A = \{a, b, c\}$$

es $n[\wp(A)] = 2^{n(A)} = 2^3 = 8$, como se comprueba a continuación

$$\varphi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

1.1.1.3 Operaciones con conjuntos

- **La Intersección de dos conjuntos, representado por** $A \cap B.$

representa otro conjunto que está formado por los elementos que son comunes tanto al conjunto **A como al conjunto B**

$A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{a, e, i, o, u\}$

$A \cap B = \{a\}$

- **La unión de dos conjuntos A y B será otro conjunto que estará formado por los elementos tanto de A como de B . Si hay algún elemento repetido solo se pone una vez .**

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

1.1.1.4 Propiedad conmutativa

$A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$

Ejemplo

Siendo $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$ y

$A \cup B =$ | $A \cap B =$

$B \cup A =$ | $B \cap A =$

Diremos que dos subconjuntos **B** y **C** de un conjunto **A** son complementarios si no tienen nada en común y su unión es el conjunto **A**

$B \cap C = \emptyset$

$B \cup C = A$

Ejemplos

Ejemplo 5

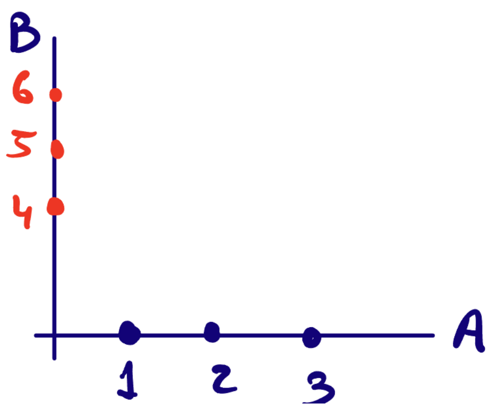
Siendo $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$ y $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ (conjunto universal), obtener A', B', $A \cup B'$, $A' \cap B$, donde A' señala el complementario de A.

$$A' = \{e, f\}; \quad B' = \{a, c, f\}; \quad A \cup B' = \{a, b, c, d, f\} \quad \text{y } A' \cup B = \{e\}$$

1.1.1.5 Producto cartesiano

Se llama producto cartesiano de dos conjuntos **A={ 1,2,3}** y **B ={ 4,5,6}** al conjunto formado por todos los pares ordenados que se pueden formar , eligiendo primero un elemento de **A** y segundo un elemento de **B.**

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$



Relación de orden

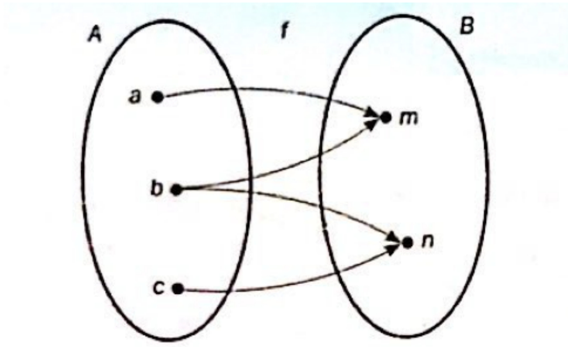
En matemáticas existen distintas relaciones entre los elementos de un conjunto pero una de especial importancia es **la relación de orden**

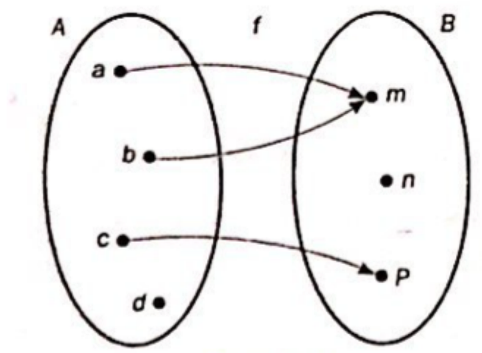
Para que una relación sea de orden ha de cumplir las tres siguientes condiciones:

1. **Reflexiva .** **x R x**
2. **Simétrica.** **si x R y , entonces y R x**
3. **Transitiva .** **Si x R y , y además y R z , entonces se debe cumplir que x R z.**

Correspondencias

Veremos con unos ejemplos qué entendemos por correspondencias .

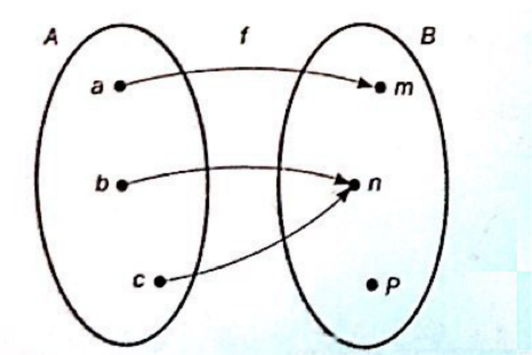




Veamos dos conjuntos importantes en esta aplicación .

- El conjunto { a,b,c,d} se llama conjunto **Inicial**
- El conjunto {a,b,c} se llama conjunto **Origen**
- El conjunto { m,n,p } se llama conjunto **final**
- El conjunto { m,p} se llama conjunto **Imagen**

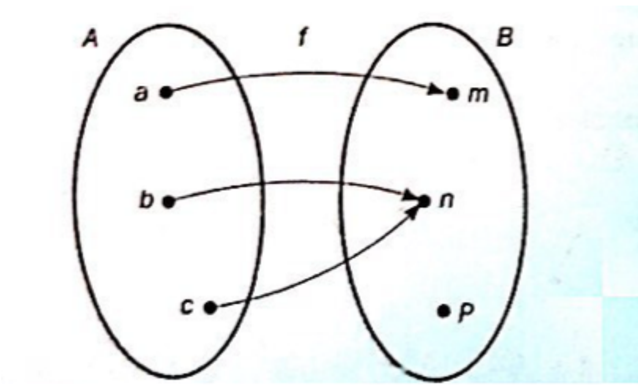
Ahora veremos que dentro de las correspondencias, una muy importante tanto en el mundo de las matemáticas como de las ciencias que de ella se nutren es el concepto **de aplicación** . Una **aplicación** es una correspondencia muy especial , ha de cumplir una serie de condiciones que iremos desgranando ahora .



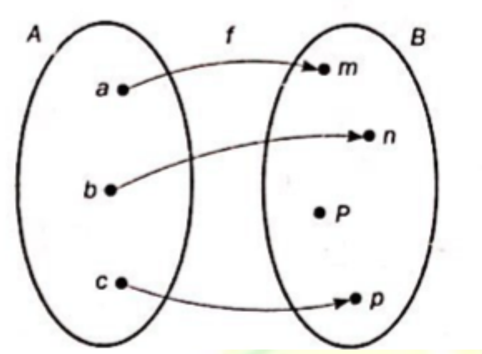
- **Ningún elemento del conjunto Origen o inicial puede quedar sin relacionarse con un elemento del conjunto Final**
- **Un elemento del conjunto inicial no puede estar relacionado con más de un elemento del conjunto Final**

Veamos ahora tipos especiales de aplicaciones

- **Aplicación inyectiva .** Para que una aplicación sea **Inyectiva** no puede haber un elemento del conjunto final que sea **Imagen** de dos elementos distintos del conjunto **Origen**

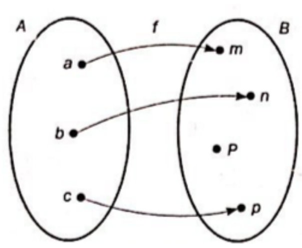


Esta aplicación no es inyectiva ya que el elemento **n del conjunto final es imagen de dos elementos del conjunto Origen que son b y c** .

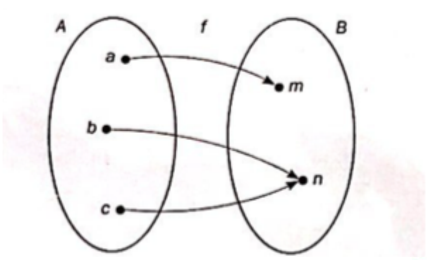


Esta aplicación sí que es inyectiva

- **Aplicación sobreyectiva .** Una aplicación es sobreyectiva cuando el conjunto final coincide con el conjunto imagen

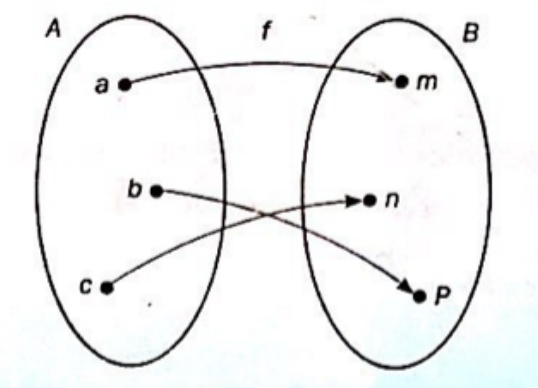


No es sobreyectiva ya que existe un elemento en el conjunto final (p) que no es imagen de ningún elemento de ningún elemento del conjunto Origen .



Esta aplicación sí es sobreyectiva

- **Aplicación inyectiva .** Una aplicación es biyectiva cuando sea inyectiva y sobreyectiva a la vez



Ejemplo de aplicación **biyectiva .**

Estructuras importantes matemáticas.

Primero veremos qué es una ley de **composición interna**.

Formalmente diremos que una ley de composición interna definida en un conjunto **E** es una aplicación de **E x E** en **E**

Veamos un ejemplo para entender esta definición.

Sea el conjunto **E= N** donde **N** es el conjunto de los números naturales, definamos la operación **suma (+)**

Dados dos elementos de **N** por ejemplo 3 y 7 , la suma 3+7 =10 es otro número que también es natural , es decir , 10 pertenece a **N** .

Ojo , esto no se cumple todas las operaciones que conocemos , por ejemplo si tomamos el conjunto **N** y como operación la resta (-) , no siempre la resta de dos números naturales es un número natural . Por ejemplo si restamos

$$3-5=-2 \notin N$$

Por tanto la resta no es una **ley de composición interna** ya que el resultado da un elemento que está en otro conjunto **.**

Veamos ahora unas cuantas estructuras, para ello tomaremos un conjunto **E** y definiremos una ley de composición interna. Dependiendo de las propiedades que se cumplan diremos que tiene una estructura u otra .

- Un conjunto eje le que se define una ley de composición interna se llama **grupoide.**
- Un **grupoide** en el que se cumpla la propiedad **asociativa** se denomina **semigrupo**
- **Un semigrupo en** el que hay **elemento neutro y simétrico** se denomina **grupo**
- **Un grupo (semigrupo)** en el que se cumple la propiedad conmutativa se denomina **grupo (semigrupo) abeliano.**

Existen otras estructuras matemáticas en las que se han definido más de una operación.

- **Un semianillo** es un conjunto **S** en que se han definido dos operaciones internas a las que denominaremos **+** y ***** de manera que
  (S , +) sea un grupo abeliano
  (S , *) sea un semigrupo
  Y la ley * es distributiva respecto de la multiplicación

- **Un anillo sobre un conjunto A es una estructura matemática en la que**

  (A , +) grupo abeliano
  (A , *) es un semigrupo
  La ley * es distributiva respecto de +

Además si la ley (*) tiene elemento neutro se dice anillo unitario y si la propiedad (*) es conmutativa se dice que es un Anillo conmutativo

Un Cuerpo sobre un conjunto C es una estructura matemática en el que hay definida dos operaciones (+) y (*) tal que

(C , +) es un grupo abeliano
(C - {0} , *) es grupo abeliano donde el 0 es el elemento neutro de la operación +
La ley (*) es distributiva respecto a la (+)

Si la ley (*) no fuese conmutativa se dirá que ese un cuerpo alabeado

Ejemplos

a). El conjunto N de los números naturales con la suma y el producto ordinarios es un semianillo

b) el conjunto Z de los números enteros con la suma y el producto ordinarios tiene una estructura de anillo unitario y abeliano .

c) El conjunto Q de los números racionales, R de los números reales y C de los complejos con las sumas y productos ordinarios alcanzan estructura de Cuerpo

Estructura		Ley comp. interna	Asociativa	Elem. neutro	Elem. sim.	Conmutativa
Semianillo	Ley +	×	×		×	
	Ley −	×	×			
Anillo	Ley +	×	×	×	×	×
	Ley ·	×	×			
Cuerpo	Ley +	×	×	×	×	×
	Ley −	×	×	×	× salvo el neutro de +	×

Ley de composición externa

Una ley de composición externa definida sobre un conjunto **E** y con operadores en **Ω** es una aplicación de **E x Ω** en **E** .

A los elementos de **E** los designaremos con letras latinas y a los elementos de **Ω** con letras griegas

Se han de cumplir :

1. $\lambda (\mu x) = (\lambda\mu) x$
2. $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
3. $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda\mu$
4. $1 x = x$

1.2 La estructura de espacio vectorial

Sea **F** un cuerpo cuyos elementos se representarán con letras griegas y **V** un grupo abeliano cuyos elementos los representaremos con letras latinas . Definiremos un espacio vectorial **V** sobre el cuerpo **F** si se define una aplicación de **F x V** en **V** tal que para todo **λ € F** y **x € V** entonces **λx € V** .

Además se han de cumplir

I. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (distributividad con respecto a la adición de V)

II. $(\lambda \oplus \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (distributividad respecto a la adición de $\mathbb{F}$)

III. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda * \mu) \cdot x$ (asociatividad de los elementos de $\mathbb{F}$)

IV. $\varepsilon \cdot x = x$, siendo ε el elemento neutro de $\mathbb{F}$,

siendo $+$ la operación de V y $\oplus$ y $*$ las de $\mathbb{F}$.

En la mayoría de los casos tomaremos al conjunto de los números reales **R** como el cuerpo **F** .

Veamos un ejemplo de **espacio vectorial** .

El conjunto **A** de las matrices cuadradas de orden 2 tiene estructura de **espacio vectorial** sobre el cuerpo **R** , siendo **+** la suma habitual de matrices y *** el** producto de un número por una matriz .

Propiedades de los espacios vectoriales

- El elemento neutro respecto de la suma ha de ser único
- Para la segunda propiedad hemos de distinguir en un principio del elemento cero (0) del conjunto **F** del cero (**0**) del conjunto **V** . Una vez hecha la distinción , esta segunda propiedad dice que 0 * **v** = **0**

Dependencia e independencia lineal

Existe una definición formal para saber cuando un conjunto de vectores **v1 , v2 …. vn** son vectores **linealmente dependientes .**

Definición : Diremos que un conjunto **v1 , v2 … vn** son linealmente dependientes si existes unos escalares (números) de manera que si

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

entonces algún **λi** deberá ser distinto de cero

Ejemplo :

Comprobar si el conjunto de vectores de **R2**

u= (1,3) , v = (2, -4) y **w = (4 , 2)** es un conjunto linealmente dependiente o no .

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

$$\lambda_1 (1,3) + \lambda_2 (2,-4) + \lambda_3 (4,2) = (0,0)$$

Si el conjunto de vectores no fuese linealmente dependiente entonces diremos que el conjunto de vectores es linealmente independiente.

Ejemplo :

u= (1, 5) y **v = (2 , -1)**

Combinaciones lineales .

Una combinación lineal de un conjunto de vectores será una expresión de la forma

$$\lambda 1 * v1 + \lambda 2 * v2 + \ldots + \lambda n * vn$$

Por ejemplo : dados los vectores **u= (1,4)** y **v= (3,7)**

Otra cosa que nos pueden preguntar es si un vector dado **u** es **combinación lineal** de un conjunto de vectores **v1, v2 , … , vn**

Ejemplo : veamos si el vector **u= (6, 1)** es combinación lineal de los vectores **v1=(1,1)** y **v2 = (4,-1)**

Subespacios vectoriales o variedades lineales

Se dice que un conjunto no vacío **W** es un subespacio vectorial de Un espacio vectorial **V** cuando

- **W es un subconjunto de V**
- **W es un espacio vectorial si consideramos las propiedades + y ***

Como norma general para comprobar que un conjunto dado **W** es un subespacio vectorial de un espacio vectorial **V** será suficiente con comprobar las siguientes propiedades

1. **Hemos de comprobar que el elemento neutro para la suma está en el conjunto W**
2. **Hemos de comprobar que dados dos elementos u y v de W , la suma de ellos también está en W , es decir , si u y v € W entonces u+ v € W**
3. **Si λ € F y v € W entonces λ*v € W**

A modo de ejemplo veamos si el conjunto siguiente es un subespa vectorial de **R2**

$W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \}$

Observaciones sobre subespacios vectoriales

- La primera observación que vamos a efectuar es que el elemento neutro para la suma ha de estar en el subespacio.

- La intersección de dos subespacios es otro subespacio , es decir , si **W1** y **W2** son dos subespacios vectoriales de **V** entonces

$W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V

- La suma de dos subespacios es otro subespacio vectorial , es decir , si **W1** y **W2** son dos subespacios vectoriales de **V** entonces **W1 + W2** es otro subespacio vectorial de **V**

- La unión de subespacios vectoriales por norma general no es un subespacio vectorial .

Bases y dimensión

Vamos a entrar en dos conceptos muy importantes , a saber , el concepto de base de un espacio o subespacio vectorial y el concepto de dimensión de un espacio o subespacio vectorial.

Base de un espacio vectorial. Una base de un espacio (subespacio) es un conjunto de vectores al que llamaremos **K** que están dentro de ese espacio (subespacio) de manera que cualquier vector del espacio (subespacio) se puede obtener como combinación lineal de los elementos del conjunto **K** . Además los elementos del conjunto **K** han de ser independientes y esto último es muy importante .

Podríamos ver si el conjunto **K = { u=(1, 1) , v=(2,3) } es una base de R2**

La **dimensión** es un concepto que viene asociado a un espacio (subespacio) vectorial y coincide con el número de vectores que forman una base de ese espacio (subespacio) . En el ejemplo anterior la base tenía dos elementos y esos elementos eran elementos de **R2** luego la dimensión de **R2** es **2** .

Ejercicios

1. Los vectores del espacio tridimensional

$$a = (2, 3, -1), \quad b = (1, 2, -1) \quad \text{y} \quad c = (1, -1, 2)$$

¿Forman una base de dicho espacio?

INFO@ADEFACIL.COM

2. El mismo problema anterior para los vectores del espacio tetradimensional:

$$a = (1, 1, 1, 1), \quad b = (1, 2, 3, 0), \quad c = (1, 3, 5, -1)$$
$$\text{y} \quad d = (1, 4, 7, -2)$$

5. Dados los vectores del espacio tetradimensional

$a = (1, 1, 1, 1)$,

$b = (1, 2, 3, 4)$,

$c = (-1, 0, 1, 2)$ y

$d = (-1, 2, 5, 8)$

determinar la dimensión del subespacio vectorial engendrado por ellos.

6. Hallar una base del subespacio vectorial del espacio anterior.

7. Hallar las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal engendrada por los vectores en el ejercicio anterior.

8. El vector $(x_1, x_2, 0, 1)$ pertenece a la variedad lineal engendrada por los vectores del ejercicio 5: hallar x_1 y x_2.