CAPÍTULO 0: NOTACIÓN Y CONCEPTOS BASE

Derivada: tasa de variación/pendiente. Se una función $y = y(x)$. Definimos su derivada como:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

En una función/ecuación diferencial debemos tener muy claro cuál es la VARIABLE INDEPENDIENTE (V.I.) y la VARIABLE DEPENDIENTE (V.D.)

La notación que usaremos a lo largo del curso:

Leibniz: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dz^2}$ ...

Lagrange: $y', y'', y''', \dots, y^n$

Newton: $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y} \dots$

CAPÍTULO 1: LA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN

1.1INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Modelización de muchos fenómenos físicos, económicos…

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

circuito RC

armónico → oscilador

1.2 CONCEPTOS GENERALES

Definición: Una ecuación diferencial es una ecuación en la que figura una **función desconocida** y **alguna de sus derivadas**. Si la función incógnita es de una variable se llama **ecuación diferencial ordinaria (EDO):**

$$y = xy'^2 + seny'$$

$$y''' - 8y''x = 0$$

Orden de una ecuación diferencial: Se llama orden de una ecuación diferencial a la derivada de mayor orden que intervenga en la ecuación.

$$\frac{dx}{dt} = kx \rightarrow \text{orden } 1$$

$$ms''(t) = \frac{k}{s^3(t)} \rightarrow \text{orden } 2$$

$$N' = k_1N - k_2N^2 \rightarrow \text{orden } 1$$

Grado de la EDO: si puede escribirse como un polinomio, el grado de la ecuación es el grado de la derivada de mayor orden.

$$y''^3 - 3y = x^2 \longrightarrow \text{orden } 2, \text{ grado } 3$$

Decimos que una función y=y(x) es una solución de la EDO y si al sustituirla a ella y a sus derivadas en la EDO se satisface la ecuación.

Ejemplo:

Comprobar que la función $\underbrace{y = \sqrt{2e^x + 2x}}$ es solución de la ecuación $yy' = e^x + 1$

$$y' = \frac{2e^x + 2}{2\sqrt{2e^x + 2x}} = \frac{e^x + 1}{\sqrt{2e^x + 2x}}$$

$$\cancel{\sqrt{2e^x + 2x}} \cdot \frac{e^x + 1}{\cancel{\sqrt{2e^x + 2x}}} = e^x + 1 \Rightarrow \cancel{e^x} + 1 = \cancel{e^x} + 1$$

$$\boxed{1 = 1} \checkmark$$

Formas en las que nos podemos encontrar una EDO

General: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$

Normal: $y^n = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$

Algunos ejemplos:

$$s''(t) = \frac{k}{ms^3(t)}$$

$$ms''(t) - \frac{k}{s^3(t)} = 0$$

Linealidad de una EDO: Una EDO de orden n es lineal si puede expresarse de a forma:

$$\boldsymbol{a_n(x) \cdot y^n + a_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = g(x)}$$

los coeficientes dependen exclusivamente de x

De manera que los coeficientes a(x) solo depende de la V.I.

·) $g(x) = 0$ → homogénea

son nºs

·) $a_0, \dots, a_n$ $constantes$ → ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

·) $a_n(x) = 1$ → forma canónica

$$y''' - 3xy' = x^2 - x$$

Algunos ejemplos:

$(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos(x)$ → lineal

$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + u = \boxed{\cos(r+u)}$ → no lineal

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}_{\text{no lineal}}}$$

$$x\frac{dy}{dx} = y + x^2 + y^2 \rightarrow \text{no lineal}$$

Forma de las soluciones: Como hemos visto antes, la solución de una EDO de orden n está por formada por una función $y = y(x)$. Pero además deberemos definir un intervalo Ω de manera que se cumpla que:

Condición 1: La función $y = y(x)$ satisface la ecuación diferencial para todo $x \in \Omega$.

Condición 2: Regularidad, y es continua y derivable n veces en Ω, además todas sus derivadas son continuas en Ω.

Podemos tener la solución en dos formas:

$$Explícita \rightarrow y = y(x)$$

$$Implícita \rightarrow G(x, y) = 0$$

La comprobación de que una función es solución de una ecuación diferencial dependerá de la forma en la que tengamos la solución:

Explícita: derivamos tantas veces como orden tiene la ecuación, estudiamos la continuidad de la función y sus derivadas y comprobamos que cumple que la ecuación. Definiremos Ω lo más grande posible.

Ejercicio 1: Comprobar que $y = (1 - senx)^{-\frac{1}{2}}$ es solución de $2y' = y^3 cosx$

$$y' = -\frac{1}{2}(1-\operatorname{sen}x)^{-3/2} \cdot (-\cos x) \rightarrow$$

$$\cancel{2} \cdot \cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}(1-\operatorname{sen}x)^{-3/2}(\cancel{-}\cos x) = \left[(1-\operatorname{sen}x)^{-1/2}\right]^3 \cdot \cos x$$

$$(1-\operatorname{sen}x)^{-3/2} \cdot \cos x = (1-\operatorname{sen}x)^{-3/2} \cdot \cos x \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}x}} \rightarrow 1-\operatorname{sen}x > 0 \Rightarrow 1 > \operatorname{sen}x \qquad [-1, 1]$$

$$\Omega - \{\pi/2 \ (90^\circ)\}$$

Ejercicio 2: Comprobar que $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ es solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$y' = 2c_1e^{2x} + c_2e^{2x} + 2c_2xe^{2x}$$

$$y'' = 4c_1e^{2x} + 2c_2e^{2x} + 2c_2e^{2x} + 4c_2xe^{2x}$$

$$\cancel{4c_1e^{2x}} + \cancel{2c_2e^{2x}} + \cancel{2c_2e^{2x}} + \cancel{4c_2xe^{2x}} - \cancel{8c_1e^{2x}} - \cancel{4c_2e^{2x}} - \cancel{8c_2xe^{2x}} + \cancel{4c_1e^{2x}} + \cancel{4c_2xe^{2x}} =$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\Omega : \mathbb{R}$$

Implícita: Deberemos derivar implícitamente y comprobar que satisface la ecuación. Pare ello deberemos relacionar la expresión obtenida con la ecuación diferencial**.**

Ejercicio 1: Comprobar que $e^{xy} + y = x - 1$ es solución $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{xy} + y\right) = \frac{d}{dx}(x-1) \rightarrow e^{xy} \cdot [y + x \cdot y'] + y' = 1$$

$$e^{xy} \cdot y + e^{xy} \cdot xy' + y' = 1 \rightarrow y'\left[e^{xy} \cdot x + 1\right] = 1 - e^{xy} \cdot y$$

$$y' = \frac{1 - e^{xy} \cdot y}{e^{xy} \cdot x + 1} = \boxed{\frac{e^{-xy} - y}{x + e^{-xy}}} \checkmark$$

Ejercicio 2: Comprobar si la expresión $x^2 + y^2 = 6$ es solución implícita de la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ $\Rightarrow y' = x/y$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}(6) \rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$2y \cdot y' = -2x \Rightarrow y' = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}y} \Rightarrow y' = -x/y \; X$$

1.3 LA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN

Ecuación de la forma:

orden 1

$$F(x, y, y') = 0$$

En algunos casos podremos escribir:

$$\boxed{y' = f(x, y)}$$

Dado un punto (x_0, y_0) ¿existe alguna una función que pase por ese punto y de solución a la ecuación?

El problema que queremos resolver, también conocido como: Problema del Valor Inicial (PVI) o problema de Cauchy:

$$\boxed{PVI: \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$

$f(x,y)$

condiciones iniciales

Dada la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ y un punto (x_0, y_0) del dominio de definición f, ¿qué condiciones debe cumplir la función f para que exista una única solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación, tal que $y_0 = \varphi(x_0)$?

El Teorema de existencia y unicidad nos dice que: Sea f una función continua de un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$. Consideremos el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Si la función satisface las condiciones:

a) f es continua en Ω. → (x_0, y_0) y su entorno

b) f posee derivada parcial $\underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}_{\text{sea continua en } (x_0,y_0)}$ continua en Ω.

Entonces estamos seguros de que existe una función única que satisface la ecuación. Que no se cumplan las condiciones no demuestra que no exista.

Cabe recalcar, por lo tanto:

Existen PVIs que no tienen solución: $\begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ → $y' = y/x$

Existen PVIs con solución única: $\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Existen PVIs con más de una solución: $\begin{cases} y' = xy^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Ejercicio 1: Sea el siguiente PVI: $\begin{cases} y' = \frac{2xy}{y-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$, ¿es posible usar el Teorema de existencia y unicidad para asegurar la existencia de una solución única?

$$y' = \frac{2x}{y-1} \Rightarrow f(x,y) = \frac{2x}{y-1}$$

$(0,1) \rightarrow f(x,y)$ no es continua en $y=1 \rightarrow$ no podemos la existencia de una solución única.

Ejercicio 2: Para la ecuación $y' = 1 + y^2$. Comprobar si $y = \tan(x+c)$ es una familia de soluciones. ¿Garantiza el Teorema de existencia y unicidad la existencia única de una solución para el PVI?:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

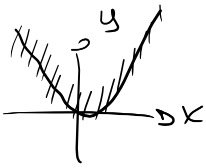
$$y' = [1 + \tan^2(x+c)] \cdot 1 \Rightarrow 1 + \tan^2(x+c) = 1 + \tan^2(x+c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Estudiar para los distintos valores de x_0 e y_0 la existencia y la unicidad de la solución para el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2xy}{y - x^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \frac{2xy}{y-x^2} \Rightarrow \text{mientras } y_0 - x_0^2 \neq 0$$



$$\boxed{y_0 \neq x_0^2}$$

Una **FAMILIA DE SOLUCIONES** de una EDO es un conjunto de funciones (que puede depender de uno o varios parámetros) de forma que todas las funciones de dicho conjunto son solución de la EDO dada (dada una con su intervalo correspondiente).

Las funciones que forman parte de la familia se llaman **SOLUCIONES PARTICULARES** (no contienen constantes arbitrarias).

Si una familia de soluciones contiene a todas las soluciones de una EDO, esa familia recibe el nombre de **SOLUCIÓN GENERAL** de la EDO (contiene tantas constantes arbitrarias como el orden de la EDO).

Si existen soluciones de la EDO que no pertenecen a una familia de soluciones, reciben el nombre de **SOLUCIONES SINGULARES.**

1.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SOLUCIONES. ISOCLINAS.

En este apartado se estudiarán métodos gráficos para resolver EDO. En concreto estudiaremos dos métodos:

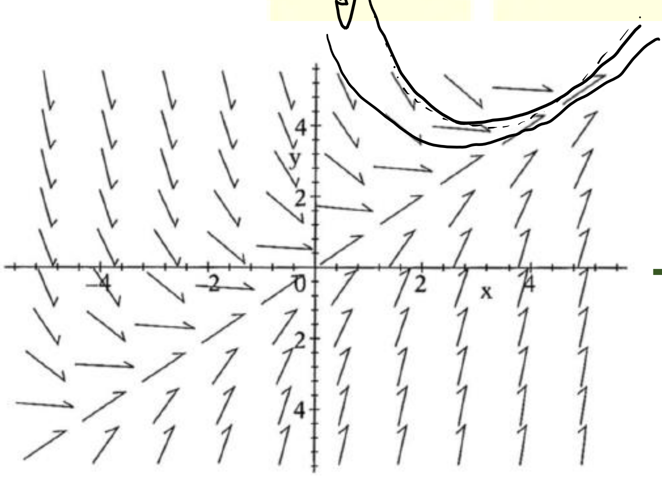
Método básico:
Si consideramos la ecuación diferencial: $y' = f(x,y)$ donde $y = \varphi(x)$ es una solución que pasa por (x_0, y_0), el valor de $f(x_0, y_0)$ es $\varphi'(x_0)$ → pendiente de la recta tangente en el punto.

En cada punto (x, y) podemos definir el vector unitario $(1, f(x,y))$ y de esta forma crear un campo de direcciones tangentes a las soluciones en cada punto.

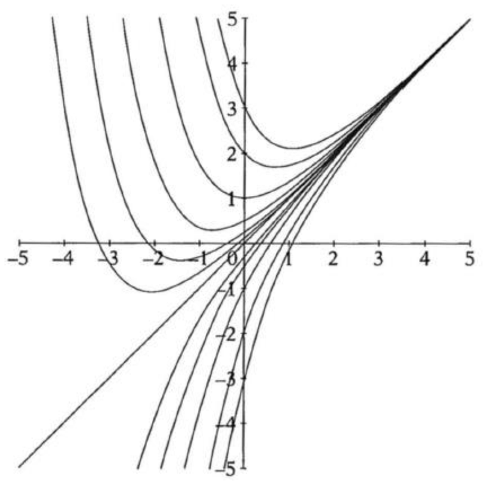
Ejemplo: $y' = x - y + 1$ → $\boxed{(1,\ x-y+1)}$

$$\vec{v} = (1,\ x-y+1) \to |\vec{v}| = \sqrt{1 + (x-y+1)^2} \to$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x-y+1)^2}},\ \frac{x-y+1}{\sqrt{1+(x-y+1)^2}} \right)$$



campo direcciones



curvas integrales

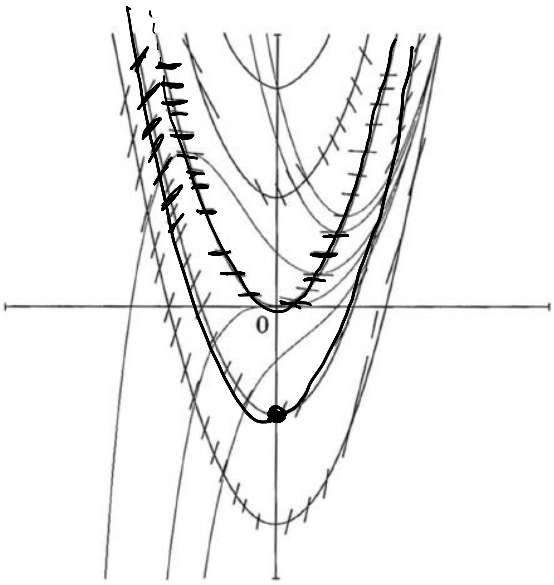
Método Isoclinas: El siguiente método nos permite buscar superficies/curvas donde la pendiente es constante. Sobre esas curvas, la pendiente de la recta tangente a la curva integral es constante en todos sus puntos.

$y' = f(x,y)$ $\boxed{f(x,y) = k}$ → curva de nivel

Ejemplo: $y' = x^2 - y$

Buscamos las isoclinas → $\boxed{f(x,y) = k}$ → $x^2 - y = k$ → $\boxed{x^2 - k = y}$

Las isoclinas son parábolas:



$k = 0$

$y = x^2$

$k = 1$

$y = x^2 - 1$