EJERCICIOS DE EXAMEN T1 - SERIES NUMÉRICAS

EX SEPTIEMBRE 2022

Pregunta 1.

A = 5

Estudiar la serie de término general: $a_n = \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{2An+1}{n}\right]^{-n} =$ (10 ≈ 2An+1)

$$= \frac{1}{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{10n+1}{n}\right]^n}$$

CRITERIO DE LA RAÍZ (CAUCHY)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{10n+1}{n}\right]^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n + \frac{10n+1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$= \frac{1}{e+10} < 1$$

La serie es CONVERGENTE

EX FEBRERO 2019 S1

1. Estudie el carácter de la siguiente serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Ln}$. (siendo L = logaritmo neperiano)

Comparar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es DIVERGENTE

$n > \ln n$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente y minorante

de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ es DIVERGENTE

EX FEBRERO 2019 S2

1. Estudiar el carácter de la siguiente serie: $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\cdots$

$n=1 \quad a_1 = 1 = \frac{3^0}{2^0}$

$n=2 \quad a_2 = \frac{3}{2} = \frac{3^1}{2^1}$

$n=3 \quad a_3 = \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2}$

$n=4 \quad a_4 = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3}$

numerador: 3^{n-1}

denominador: 2^{n-1}

$$a_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ → serie geométrica

$r = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ DIVERGENTE

criterio del término n-ésimo

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es DIVERGENTE

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ es DIVERGENTE

EX SEPTIEMBRE 2023

Pregunta 1.

Hallar la suma de l siguiente serie en caso de ser convergente: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)}$

Raabe $\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\frac{4}{(n+1)(n+1+1)}}{\frac{4}{n(n+1)}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{4\,n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2-n}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+2} = 2 = \alpha$$

$\alpha > 1 \Rightarrow$ Serie CONVERGENTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}\right)$$

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{4}{n(n+1)}$$

$$\frac{An + A + Bn}{n(n+1)} = \frac{4}{n(n+1)} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ A=4 \quad B=-4 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Serie telescópica $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$

$S_n = b_1 - b_{n+1}$

$b_n = \frac{1}{n}$

$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$S = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

$$\boxed{S_n = \frac{4}{1} - \frac{4}{n+1} \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty}\left(4 - \frac{4}{n+1}\right) = 4}$$

$S_1 = (4-2)$

$S_2 = (4-2) + (2 - \frac{4}{3})$

$S_3 = (4-2) + (2 - \frac{4}{3}) + (\frac{4}{3} - 1)$

$S_n = (4-2) + (2 - \frac{4}{3}) + (\frac{4}{3} - 1) + (1 - \frac{4}{5}) + \dots + (\frac{4}{n} - \frac{4}{n+1}) =$

$= 4 - \frac{4}{n+1}$