SERIES NUMÉRICAS

1. SERIES NUMÉRICAS INFINITAS

Mientras que es posible sumar dos números, tres números, un centenar de números, o incluso un millón de números, resulta imposible sumar una infinidad de números. La teoría de las series infinitas surge del intento de salvar esta imposibilidad.

Para formar una serie infinita, empezamos considerando una sucesión infinita de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de término general a_n.

A partir de la sucesión anterior definimos una nueva sucesión de término general S_n que corresponde a las sumas parciales:

$$S_1 = a_1 = \sum_{n=1}^{1} a_n$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \sum_{n=1}^{2} a_n$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{n=1}^{3} a_n$$

$$\ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

$$\ldots$$

DEFINICIÓN DE SERIE CONVERGENTE O DIVERGENTE

Si la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales converge a un límite finito S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. El límite S recibe el nombre de **suma de la serie.**

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Si $\{S_n\}$ presenta un límite infinito, entonces la serie **diverge** y si no existe, la serie es oscilante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

- Converge (suma finita)
- Diverge (suma infinita)
- Oscilante (no tiene suma)

- CRITERIO DEL TÉRMINO N-ÉSIMO PARA LA CONVERGENCIA

El siguiente teorema establece que si una serie converge, el límite de su término n-ésimo debe ser cero.

TEOREMA

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DEMOSTRACIÓN

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = L$.

Entonces, como $S_n = S_{n-1} + a_n$ y $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$

Se sigue que

$$L = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n-1} + a_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n = L + \lim_{n\to\infty} a_n$$

Lo cual implica que $\{a_n\}$ converge a cero.

Veamos que la condición establecida por este teorema es una condición necesaria pero no suficiente.

Utilizamos para ello la denominada serie armónica: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

En esta serie se tiene que $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ conforme $n \to \infty$, no obstante se demuestra a continuación que la serie armónica es divergente.

- CRITERIO DEL TÉRMINO N-ÉSIMO PARA LA DIVERGENCIA

Este criterio del término n-ésimo para la divergencia establece que si el límite del término n-ésimo de una serie no converge a cero, la serie diverge.

TEOREMA

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

CONSIDERACIONES ALGEBRAICAS

PROPOSICIÓN

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

son convergentes, entonces para todo par de números reales α, β, la serie

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DEMOSTRACIÓN

Basta tomar un número finito de términos *k,* para los que se verifica:

$$\sum_{n=1}^{k}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{k} a_n + \beta\sum_{n=1}^{k} b_n$$

Tomando límites cunado $k \to \infty$ y considerando que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

son convergentes se verifica la proposición.

PROPOSICIÓN

Si en una serie se intercalan (suprimen) un número finito de términos cuya suma es A, la serie obtenida tiene el mismo carácter, convergente o divergente, que la inicial.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, la nueva tiene por suma $S + A$ (respectivamente $S - A$)

DEMOSTRACIÓN

Considerando la suma parcial correspondiente a los p primeros términos, en la que estarán considerados todos los términos intercalados y n términos de la serie original:

$$U_p = A + S_n$$

Tomando límites cuando $p \to \infty$ y considerando que también $n \to \infty$:

$$\lim_{p\to\infty} U_p = A + \lim_{n\to\infty} S_n$$

La convergencia o divergencia de la nueva serie depende de la convergencia o divergencia de la serie original y caso de ser ésta convergente y de suma S, la nueva serie sumará $A + S$.

2. SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

DEFINICIÓN

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números reales es de términos positivos si $a_n \geq 0$ para todo número natural n. Diremos que es de términos estrictamente positivos si $a_n > 0$ para todo

$n \geq 1$

PROPOSICIÓN

Las series de términos positivos convergen o divergen a $+\infty$.

DEMOSTRACIÓN

La sucesión de sumas parciales será monótona creciente, si esta acotada tendrá límite y la serie será convergente, si no esta acotada será divergente a $+\infty$.

CRITERIOS GENERALES DE COMPARACIÓN

Los criterios de comparación que vamos a estudiar a continuación, reducen el estudio de la convergencia de una serie dada al de ciertas series de referencia, series tipo cuya convergencia o divergencia nos es conocida.

- CRITERIO DE COMPARACIÓN DE GAUSS

SERIE MAYORANTE

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si para todo $n \geq n_0$ se verifica que $a_n \geq b_n$

PROPOSICIÓN

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos convergentes y mayorante que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente.

SERIE MINORANTE

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si para todo $n \geq n_0$ se verifica que $a_n \leq b_n$

PROPOSICIÓN

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos, divergente y minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

SERIE ARITMÉTICA

Una serie cuyos términos son de la forma:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_2 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Esta serie es divergente siempre, salvo el caso trivial $a_1 = 0, d = 0$.

Para sumar un número finito de términos procederemos del modo siguiente:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

SERIE GEOMÉTRICA

Una serie cuyos términos son de la forma:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_2 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donde r recibe el nombre de razón de la serie geométrica

En definitiva se trata de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$

Por tanto es convergente para el caso $r < 1$, siendo divergente en los demás casos.

La suma de un número finito de términos es: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

Si a cada uno de los componentes de la ecuación anterior lo multiplicamos por la razón r resulta:

$$rS_n = ra_1 + ra_2 + ra_3 + \cdots + ra_{n-1} + ra_n$$

Restando la segunda ecuación de la primera resulta finalmente:

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ rS_n = ra_1 + ra_2 + ra_3 + \cdots + ra_{n-1} + ra_n \\ \hline (1-r)S_n = a_1 + 0 + 0 + \cdots - ra_n = a_1 - ra_n \end{array}$$

De modo que la suma parcial n-ésima será $S_n = \dfrac{a_1 - ra_n}{1-r}$

Cuando $r < 1$ la serie es convergente, verificando por tanto la condición necesaria de convergencia.

Pasando al límite se obtiene finalmente-;

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{siempre que } r < 1.$$

EJEMPLO

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente y al ser $n^{\alpha} \leq n$ para todo $n \geq 1$ con $\alpha < 1$ será minorante de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$; siendo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ divergente, con $\alpha < 1$.

En resumen: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\begin{cases}\alpha > 1 & convergente \\ \alpha \leq 1 & divergente\end{cases}$

- CRITERIO DE COMPARACIÓN POR COCIENTE

Dadas las series de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ para las que: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$

a) Si $\lambda \neq 0$ y finito entonces las dos series tienen el mismo carácter.

b) Si $\lambda = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

c) Si $\lambda = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

EJERCICIO

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4+2^n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ que es una progresión geométrica convergente.

Al ser: $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{4+2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 3 = \lambda \neq 0$ y finito, las dos series tienen el mismo carácter y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente también.

EJERCICIO

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente.

Al ser $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = +\infty$, se cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

CRITERIOS PARTICULARES DE COMPARACIÓN

Los criterios que se estudian aquí derivan de los de comparación y son en esencia, casos concretos de aquéllos. No es ahora necesario buscar series de referencia con las que comparar la serie dada.

- CRITERIO DE D'ALEMBERT O DEL COCIENTE

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos estrictamente positivos y existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \Rightarrow$

- Si $\alpha < 1$ la serie es convergente.
- Si $\alpha > 1$ la serie es divergente.
- Si $\alpha = 1$ el criterio no decide.

- CRITERIO DE CAUCHY O DE LA RAÍZ

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha \Rightarrow$

- Si $\alpha < 1$ la serie es convergente.
- Si $\alpha > 1$ la serie es divergente.
- Si $\alpha = 1$ el criterio no decide.

Nota: Se recuerda que cuando existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ éste coincide con $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, por tanto si al aplicar el criterio de D'Alembert (resp. Cauchy) el criterio no decide tampoco decidirá al aplicar el criterio de Cauchy (resp. D'Albembert).

- CRITERIO LOGARÍTMICO

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos estrictamente positivos y $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} = \alpha$

- Si $\alpha > 1$ la serie es convergente.
- Si $\alpha < 1$ la serie es divergente.
- Si $\alpha = 1$ el criterio no decide.

- CRITERIO DE RAABE

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos estrictamente positivos y existe $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha$

- Si $\alpha > 1$ la serie es convergente.
- Si $\alpha < 1$ la serie es divergente.
- Si $\alpha = 1$ el criterio no decide.

EJERCICIO 1

Estudiar la convergencia de la serie: $1+\frac{2}{4}+\frac{4}{27}+\frac{8}{256}+\frac{16}{3125}+\cdots$

EJERCICIO 2

Determinar el carácter de la serie: $\frac{3}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^5}+\frac{3}{2^7}+\cdots+\frac{3}{2^{2n-1}}$

EJERCICIO 3

Estudiar el carácter de las siguiente serie: $\sum_{n\epsilon\mathbb{N}} ne^{-n^2}$

EJERCICIO 4

Determinar el carácter de la serie $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$

EJERCICIO 5

Estudiar el carácter de la serie de término general $a_n = \dfrac{1}{2n(2n-1)}$

EJERCICIO 6

Estudiar la convergencia de la serie:

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(8n-11)(8n-7)}+\cdots$$

EJERCICIO 7

Determinar el carácter de la serie $\sum \frac{1}{\ln n}$

EJERCICIO 8

Determinar el carácter de la serie $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{6}{2^6}+\cdots+$

EJERCICIO 9

Determinar el carácter de la serie $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

EJERCICIO 10

Estudiar el carácter de la serie de término general $a_n = \frac{n!}{n^n}$

EJERCICIO 11

Estudiar el carácter de las siguiente serie: $\sum_{n\epsilon\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$

3. SUMA DE SERIES SERIES

Para determinados tipos de series numéricas se dispone de fórmulas que proporcionan el valor de su suma. A continuación se detallan algunas de ellas.

SERIES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

Son las series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ en donde:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad \text{progresión aritmética}$$
$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \quad \text{progresión geométrica}$$

Convergencia: La analizaremos mediante la utilización del criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 + n\cdot d)\cdot b_1 \cdot r^n}{[a_1 + (n-1)\cdot d]\cdot r^{n-1}} = r < 1$$

Luego es convergente cuando lo es la progresión geométrica es decir si $r < 1$, siendo divergente en los demás casos.

Suma: Consideremos la suma de un número finito de términos:

$$S_n = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \cdots + a_{n-1} \cdot b_{n-1} + a_n \cdot b_n$$
$$r \cdot S_n = a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_4 + \cdots + a_{n-1} \cdot b_n + a_n \cdot b_{n+1}$$
$$S_n \cdot (1-r) = a_1 \cdot b_1 + b_2 \cdot (a_2 - a_1) + b_3 \cdot (a_3 - a_2) + \cdots + b_n \cdot (a_n - a_{n-1}) - a_n \cdot b_{n+1}$$
$$S_n \cdot (1-r) = a_1 \cdot b_1 - a_n \cdot b_{n+1} + d \cdot (b_2 + \cdots + b_n)$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ y considerando que si $r < 1$ la serie es convergente y por tanto el $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$

$$S \cdot (1-r) = a_1 \cdot b_1 - 0 + d\,\frac{b_2}{1-r} = a_1 \cdot b_1 + \frac{d \cdot b_1 \cdot r}{1-r}$$

Por tanto: $S = \frac{b_1}{1-r}\left(a_1 + \frac{d\cdot r}{1-r}\right) = \left(\frac{a_1}{1-r} + \frac{d.r}{(1-r)^2}\right) b_1$

EJERCICIO 1

Suma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$

EJERCICIO 2

Suma la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

SERIES HIPERGEOMÉTRICAS

Son aquellas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en que la razón de un sumando respecto al anterior, en vez de ser constante, como ocurre en las series geométricas, vale: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha \cdot n + \beta}{\alpha \cdot n + \gamma}$ (1)

Nota:

Si α = 0, la serie hipergeométrica se transforma en geométrica al quedar $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\beta}{\gamma}$

(razón constante). En consecuencia, una serie geométrica es un caso particular de una serie hipergeométrica.

Convergencia:

Criterio de D'Alembert: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha \cdot n + \beta}{\alpha \cdot n + \gamma} = 1$ no decide

Criterio de Raabe: $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{\alpha \cdot n + \beta}{\alpha \cdot n + \gamma} - 1 \right) = \frac{\gamma - \beta}{\alpha}$

Luego la serie hipergeométrica será convergente si verifica que: $\frac{\gamma - \beta}{\alpha} > 1$

Suma:

Considerando (1) en la forma $a_{n+1}(\alpha \cdot n + \gamma) = a_n(\alpha \cdot n + \beta)$, igualdad que ponemos de la forma:

$$(n-1)\alpha.a_n + (\alpha + \beta)a_n = n\alpha.a_{n+1} + \gamma.a_{n+1}$$

Con lo que dando a" n" los valores 1,2,3,…,n-1 se tendrá:

$$\begin{array}{ll}
n = 1 & (\alpha + \beta)a_1 = \alpha.a_2 + \gamma.a_2 \\
n = 2 & \alpha.a_2 + (\alpha + \beta)a_2 = 2\alpha.a_3 + \gamma.a_3 \\
n = 3 & 2\alpha.a_3 + (\alpha + \beta)a_3 = 3\alpha.a_4 + \gamma.a_4 \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & (n-2)\alpha.a_{n-1} + (\alpha + \beta).a_{n-1} = (n-1)\alpha.a_n + \gamma.a_n
\end{array}$$

Sumando miembro a miembro:

$$\alpha[a_2 + 2a_3 + ... + (n-2)a_{n-1}] + (\alpha+\beta)(S_n - a_n) =$$
$$= \alpha[a_2 + 2a_3 + ... + (n-2)a_{n-1} + (n-1)a_n] + \gamma(S_n - a_1)$$

De donde

$$(\alpha+\beta-\gamma)S_n - \alpha.a_n - \beta.a_n = n\alpha.a_n - \alpha.a_n - \gamma.a_1$$

Con lo que resulta:

$$(\alpha+\beta-\gamma)S_n - \beta.a_n - n\alpha.a_n - \alpha.a_n + \gamma.a_1 = 0$$

Y por consiguiente:

$$S_n = \frac{(n\alpha+\beta)a_n - \gamma.a_1}{\alpha+\beta-\gamma}$$

Como

$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y dado que los límites de a_n y de $na_n = \frac{a_n}{1/n}$ son necesariamente nulos (si alguno de ellos no lo fuese la serie sería divergente), resulta:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-\gamma \cdot a_1}{\alpha+\beta-\gamma}$$

EJERCICIO 1

Sumar la serie: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\cdots$

EJERCICIO 2

Estúdiese el carácter y súmese, en caso de convergencia, la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$