

T2. EJERCICIOS: OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

EJERCICIO 1

La función de utilidad de un consumidor es $U(x, y) = 2\ln x + \ln y$
Su restricción presupuestaria viene dada por la ecuación $x + 2y = 18$

Calcular los niveles de x e y que el consumidor debe comprar de dos bienes A y B, respectivamente, con el fin de maximizar su utilidad.

$$\begin{aligned} \text{Max : } U(x, y) &= 2\ln(x) + \ln(y) \\ \text{s.a : } x + 2y &= 18 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \longrightarrow x = 18 - 2y \end{array} \right\} \text{MÉT. SUSTITUCIÓN}$$

$$U(x, y) = f(y) = 2\ln(18 - 2y) + \ln(y)$$

$$\frac{df}{dy} = 2 \cdot \frac{1}{18 - 2y} \cdot (-2) + \frac{1}{y} = 0 \rightarrow \frac{-4}{18 - 2y} + \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{+4}{18 - 2y} = \frac{1}{y} \rightarrow 4y = 18 - 2y \rightarrow 6y = 18 \rightarrow y = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{-4}{18 - 2y} + \frac{1}{y} = -4(18 - 2y)^{-1} + y^{-1} =$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dy^2} &= (-4)(-1)(18 - 2y)^{-2} \cdot (-2) + (-1)y^{-2} = \\ &= \frac{-8}{(18 - 2y)^2} - \frac{1}{y^2} \rightarrow \text{siempre es negativo} \end{aligned}$$

Así que $y = 3 \rightarrow x = 18 - 2 \cdot 3 = 12 \rightarrow$ En el punto $(12, 3)$ hay un máximo

En $(12, 3)$ se maximiza $U(x, y)$

EJERCICIO 2

La función de utilidad de un consumidor es: $U(x, y) = 2xy + y$
 Sujeto a: $P_1x + P_2y = M$

Donde x e y representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un período de tiempo dado. P_1 y P_2 (ambos positivos), son los precios unitarios de cada uno de los bienes y M la cantidad de dinero de la que dispone el individuo.

- Calcular la cantidad a consumir de cada uno de los bienes, si el objetivo es maximizar la utilidad.
- ¿Cuál es la variación que experimenta la utilidad máxima ante un cambio en la cantidad de dinero disponible?

Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y) = 2xy + y + \lambda(P_1x + P_2y - M)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2y + \lambda P_1 &= 0 \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2x + 1 + \lambda P_2 &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = P_1x + P_2y - M &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \lambda &= \frac{-2y}{P_1} \\ \lambda &= \frac{-2x-1}{P_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \frac{-2y}{P_1} &= \frac{-2x-1}{P_2} \\ 2y P_2 &= 2x P_1 + P_1 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y P_2 &= 2x P_1 + P_1 \rightarrow y = \frac{2x P_1 + P_1}{2 P_2} \\ P_1x + P_2y &= M \rightarrow y = \frac{M - P_1x}{P_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} y &= \frac{2x P_1 + P_1}{2 P_2} \\ y &= \frac{M - P_1x}{P_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{2x P_1 + P_1}{2 P_2} &= \frac{M - P_1x}{P_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x P_1 + P_1 &= 2M - 2P_1x \rightarrow 4x P_1 + P_1 = 2M \rightarrow x = \frac{2M - P_1}{4 P_1} \\ y &= \frac{M - P_1 \left(\frac{2M - P_1}{4 P_1} \right)}{P_2} = \frac{M - \frac{2M - P_1}{4}}{P_2} = \\ &= \frac{\frac{4M - 2M + P_1}{4}}{P_2} = \frac{2M + P_1}{4 P_2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{2M - P_1}{4P_1}$$

$$y = \frac{2M + P_1}{4P_2}$$

$$\lambda = \frac{-2y}{P_1} = \frac{-2 \left(\frac{2M + P_1}{4P_2} \right)}{P_1} = \frac{-2M - P_1}{2P_1 P_2} = - \frac{(2M + P_1)}{2P_1 P_2}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & 0 & 2 \\ P_2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H} = 2P_1 P_2 + 2P_1 P_2 = 4P_1 P_2 > 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$b) \frac{2M + P_1}{2P_1 P_2}$$

EJERCICIO 3

Resuelva el problema $\text{Min } 4x^2 + y^2$
 Sujeto a $2x + y = 5000$

Indicando el valor del multiplicador asociado a la solución.

¿Cuál será el efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo, si se incrementa en una unidad la constante de la restricción?

EJERCICIO 3

Resuelva el problema $\text{Min } 4x^2 + y^2$
 Sujeto a $2x + y = 5000$

Indicando el valor del multiplicador asociado a la solución.

¿Cuál será el efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo, si se incrementa en una unidad la constante de la restricción?

$$\mathcal{L}(x, y) = 4x^2 + y^2 + \lambda(2x + y - 5000)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 8x + 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-8x}{2} = -4x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -2y$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2x + y - 5000 = 0$$

$$2x + 2x - 5000 = 0$$

$$4x = 5000$$

$$x = \frac{5000}{4} = 1250$$

$$y = 2500$$

$$\lambda = -2 \cdot 2500 = -5000$$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H = -8 - 8 = -16 < 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

$\lambda = -5000 \rightarrow$ Si pasamos de 5000 a 5001 unidades
 el óptimo aumenta en 5000



EJERCICIO 4

Obténase los óptimos globales del programa: $f(x, y) = 10x + 8y - x^2 - 2y^2$
bajo la restricción dada por la ecuación $x + y = 4$.

$$f(x, y) = 10x + 8y - x^2 - 2y^2$$

$$x = 4 - y$$

$$\begin{aligned} f(y) &= 10(4 - y) + 8y - (4 - y)^2 - 2y^2 = \\ &= 40 - 10y + 8y - (16 + y^2 - 8y) - 2y^2 = \\ &= 40 - 10y + 8y - 16 - y^2 + 8y - 2y^2 = \\ &= 24 + 6y - 3y^2 \end{aligned}$$

$$f'(y) = 6 - 6y = 0 \rightarrow y = \frac{6}{6} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} x = 4 - 1 = 3 \end{array} \right\} P(3, 1)$$

$$f''_y = -6 < 0 \rightarrow P(3, 1) \text{ hay un máximo relativo}$$

Hessiana

$$f(x, y) = 10x + 8y - x^2 - 2y^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_x = -2x \quad f''_x = -2 \\ f'_y = 8 - 4y \quad f''_y = -4 \end{array} \right. \quad f''_{xy} = 0$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} h_2 = (-2)(-4) - 0 \cdot 0 > 0 \\ h_1 = -2 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Definida} \\ \text{negativa} \\ \downarrow \\ \text{estrictamente} \\ \text{cóncava} \\ \downarrow \\ P(3, 1) \text{ hay máximo} \\ \text{global} \end{array}$$

EJERCICIO 5

Estudie los óptimos locales de la función: $f(x, y) = x^2 + y$, bajo la restricción dada por la ecuación $x^3 + y = 0$

$$\begin{array}{l} \text{Optimizar: } f(x, y) = x^2 + y \\ \text{s.a.: } x^3 + y = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Optimizar: } f(x, y) = x^2 + y \\ \text{s.a.: } x^3 + y = 0 \end{array}} \right\} \text{MÉT. sustitución}$$
$$\xrightarrow{\quad} y = -x^3$$

$$f(x) = x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 2x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(2 - 3x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \underline{x=0} \\ 2-3x=0 \end{array} \right.$$

$$y = -x^3 \rightarrow \text{si } \left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow P(0,0) \\ x=\frac{2}{3} \rightarrow y=-\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27} \rightarrow P\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}\right) \end{array} \right. \quad \underline{x=\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = 2 - 6x \left\{ \begin{array}{l} f''(0) = 2 > 0 \rightarrow P(0,0) \text{ hay un} \\ \text{mínimo local} \\ f''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 6 \cdot \frac{2}{3} = -2 < 0 \rightarrow \\ \rightarrow P\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}\right) \\ \text{hay un máximo} \\ \text{local} \end{array} \right.$$

EJERCICIO 6

Sea la función de costes de una empresa $C(x, y) = -x + (y - 1)^2 + 10$. Donde x e y son las cantidades de los factores A y B que se utilizan para obtener el producto Q. Fijado el nivel de producción de Q en 9 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene dada por la función de producción:

$$Q(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

Se pide:

- ¿Cuál será la elección del empresario si su objetivo es determinar la combinación de factores (entendiéndose que sólo se considerará aquella combinación donde los dos factores sean positivos) que minimizan el coste de la empresa, para un nivel de producción de 9 unidades?. En este caso, ¿qué valor alcanzaría el coste de la empresa?.
- Si tras una mejora en la productividad de la empresa, el empresario se plantease aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuiría con ellos sus costes?. Razone la respuesta.

a) Minimizar: $C(x, y) = -x + (y - 1)^2 + 10$

s.a: $Q(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 = 9$

$$\mathcal{L}(x, y) = -x + (y - 1)^2 + 10 + \lambda (x^2 + (y - 1)^2 - 9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -1 + 2\lambda x = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2(y - 1) \cdot 1 + \lambda 2(y - 1) \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + (y - 1)^2 - 9 = 0$$



$$\textcircled{1} \quad \lambda = \frac{1}{2x} \rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\textcircled{2} \quad 2(y-1) \cdot 1 + \lambda 2(y-1) \cdot 1 = 0$$

$$\cancel{2(y-1)} = -\lambda \cancel{2(y-1)} \Rightarrow \lambda \neq -1 \rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad x^2 + (y-1)^2 = 9 \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2(y-1) \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2(y-1) & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{H} &= - \underline{\underline{2(y-1)}} \underline{\underline{2\lambda}} \cdot \underline{\underline{2(y-1)}} - \underline{\underline{2x}} \cdot \underline{\underline{2x}} (2+2\lambda) = \\ &= -8\lambda(y-1)^2 - 4x^2(2+2\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(3, 1, \frac{1}{6}) &= -8 \frac{1}{6} (1-1)^2 - 4 \cdot 3^2 (2 + 2 \frac{1}{6}) = \\ &= 0 - 4 \cdot 9 \frac{14}{6} = -84 < 0 \end{aligned}$$

$P(3, 1)$ hay un mínimo

$$C(3, 1) = -3 + (1-1)^2 + 10 = 7$$

b) $\lambda = \frac{1}{6} \rightarrow$ Interpretación del multiplicador de Lagrange

El coste marginal de aumentar una unidad el nivel de producción supone disminuir (lo opuesto a $\lambda = \frac{1}{6}$) en $\frac{1}{6}$ los costes



EJERCICIO 7

La función de utilidad de un consumidor, depende de la adquisición que éste haga de tres bienes (x, y, z) , en los siguientes términos:

$$U(x, y, z) = 5\ln x + 3\ln y + 2\ln z, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

Si los precios unitarios de cada uno de los bienes son 10, 2 y 4 u.m. respectivamente, determine la cantidad de cada bien que hará máxima la utilidad del consumidor, si éste agota su renta que es de 1.000 u.m.

$$\text{Max: } U(x, y, z) = 5\ln x + 3\ln y + 2\ln z$$

$$\text{s.a: } 10x + 2y + 4z = 1.000$$

$$\mathcal{L}(x, y, z) = 5\ln x + 3\ln y + 2\ln z + \lambda(10x + 2y + 4z - 1000)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 5 \cdot \frac{1}{x} + 10\lambda = 0$$

$$\frac{5}{x} = -10\lambda \rightarrow x = \frac{-5}{10\lambda} = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 3 \cdot \frac{1}{y} + 2\lambda = 0$$

$$\frac{3}{y} = -2\lambda \rightarrow y = -\frac{3}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2 \cdot \frac{1}{z} + 4\lambda = 0$$

$$\frac{2}{z} = -4\lambda \rightarrow z = \frac{-2}{4\lambda} = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10x + 2y + 4z - 1000 = 0$$

$$x = z$$

$$\overset{5}{\cancel{10}} \left(-\frac{1}{\cancel{2}\lambda} \right) + \cancel{2} \left(\frac{-3}{\cancel{2}\lambda} \right) + \overset{2}{\cancel{4}} \left(-\frac{1}{\cancel{2}\lambda} \right) - 1000 = 0$$

$$+ \frac{5}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} + 1000 = 0 \rightarrow \frac{10}{\lambda} = -1000$$

$$\lambda = \frac{-10}{1000} = -\frac{1}{100}$$



$$x = \frac{-1}{2 \left(\frac{-1}{100} \right)} = + \frac{1}{2/100} = 1 \cdot \frac{100}{2} = 50$$

$$z = x = 50$$

$$y = \frac{-3}{2 \left(\frac{-1}{100} \right)} = \frac{3}{2/100} = 3 \cdot \frac{100}{2} = 150$$

$$d = - \frac{1}{100}$$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_u \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} & L''_{xu} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} & L''_{yu} \\ g'_u & L''_{ux} & L''_{uy} & L''_{u^2} \end{vmatrix}$$

Pues bien, se demuestra que:

- 1.- Existirá máximo si $\bar{H}_2 > 0$ y $\bar{H} < 0$
- 2.- Existirá mínimo si $\bar{H}_2 < 0$ y $\bar{H} < 0$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 2 & 4 \\ 10 & -\frac{5}{x^2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{y^2} & -\frac{2}{z^2} \\ 4 & 0 & -\frac{2}{y^2} & -\frac{2}{z^2} \end{vmatrix} = - \frac{1}{46875} < 0$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 10 & 2 \\ 10 & -\frac{5}{x^2} & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{y^2} \end{vmatrix} = -2 \left(-\frac{5}{x^2} \right) 2 - 10 \cdot 10 \left(-\frac{3}{y^2} \right) = \\ &= \frac{20}{x^2} + \frac{300}{y^2} > 0 \end{aligned}$$

$P(50, 150, 50)$ hay un máximo

EJERCICIO 8

Estudie los óptimos locales de la función: $f(x, y) = x^2 + y$, bajo la restricción dada por la ecuación $x^3 + y = 0$

$$\text{Opt : } f(x, y) = x^2 + y$$

$$\text{s.a : } x^3 + y = 0$$

$$L(x, y) = x^2 + y + \lambda(x^3 + y)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda x^2 = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 + y = 0 \quad (2) \end{array} \right\} \rightarrow \lambda = -1$$

$$(1) \quad 2x + 3(-1)x^2 = 2x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(2 - 3x) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$(2) \quad y = -x^3 \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x = 0 \rightarrow y = 0 \\ \text{si } x = \frac{2}{3} \rightarrow y = -\frac{8}{27} \end{array} \right.$$

Soluciones: $P(0, 0, \lambda = -1)$

$P(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}, \lambda = -1)$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & 3x^2 & 1 \\ 3x^2(2+6\lambda x) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2 + 6\lambda x)$$

$$\bar{H}(0, 0, \lambda = -1) = -(2 + 6(-1) \cdot 0) = -2 < 0 \rightarrow P(0, 0) \text{ hay mínimo local}$$

$$\bar{H}(\frac{2}{3}, 0, \lambda = -1) = -(2 + 6(-1)\frac{2}{3}) = -(2 - 4) = 2 > 0 \rightarrow P(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}) \text{ hay un máximo local}$$



EJERCICIO 9

Considere la función de utilidad de un consumidor dada por:

$U(x, y) = \ln x + \ln y$, donde la restricción presupuestaria viene determinada por la ecuación: $px + qy = r$, siendo p y q los precios de cada uno de los bienes y r la renta monetaria.

- Calcular las unidades que ha de consumir x , y para maximizar la utilidad.
- ¿Se puede afirmar que el máximo obtenido es un máximo global del problema?
- Halle aproximadamente la variación en la utilidad máxima del consumidor si la renta disponible aumenta en una unidad.

$$\text{Max} : U(x, y) = \ln x + \ln y$$

$$\text{s.a} : px + qy = r$$

$$\mathcal{L}(x, y) = \ln x + \ln y + \lambda (px + qy - r)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} + \lambda p = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{px}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} + \lambda q = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{qy}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = px + qy - r = 0 \quad \text{①}$$

$$\text{①} \quad px + qy = r \quad \rightarrow \quad px + px = r \rightarrow 2px = r \rightarrow x = \frac{r}{2p}$$

$$\text{②} \quad px = qy \quad \rightarrow \quad y = \frac{px}{q} = \frac{p}{q} \cdot x = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{2p} = \frac{r}{2q}$$

$$x = \frac{r}{2p}$$

$$y = \frac{r}{2q}$$

$$\lambda = -\frac{1}{qy} = -\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\frac{r}{2q}} = -\frac{1}{q} \cdot \frac{2q}{r} = -\frac{2}{r}$$

$$x = \frac{r}{2p}$$

$$y = \frac{r}{2q}$$

$$\lambda = -\frac{2}{r}$$



$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ q & 0 & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = +q^2 \left(+\frac{1}{x^2} \right) + p^2 \left(+\frac{1}{y^2} \right) =$$

$$= \frac{q^2}{x^2} + \frac{p^2}{y^2} > 0 \rightarrow \text{máximo}$$

$$b) u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_x = \frac{1}{x} \quad f''_{x^2} = -\frac{1}{x^2} \\ f'_y = \frac{1}{y} \quad f''_{y^2} = -\frac{1}{y^2} \end{array} \right.$$

$$H = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2 \cdot y^2} > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1 = -\frac{1}{x^2} < 0 \\ h_2 = \frac{1}{x^2 y^2} > 0 \end{array} \right\} \text{Definida negativa}$$

↓
Cónvexa

↓
 $P\left(\frac{r}{2p}, \frac{r}{2q}\right)$ máximo global

$$c) d = \frac{-2}{r} \rightarrow \text{variación es } +\frac{2}{r}$$

EJERCICIO 10

Un consumidor dispone de 600 u.m para gastar en dos productos. El primero de ellos tiene un precio de 20 u.m por unidad y el segundo de 30 u.m por unidad. Si la función del consumidor es: $U(x, y) = 10x^{0.6}y^{0.4}$, se pide:

- Determinar el número de unidades de cada artículo que deberá comprar el consumidor para maximizar la utilidad.
- Calcule la utilidad máxima.
- Halle aproximadamente la variación en la utilidad máxima del consumidor si la renta disponible aumenta en una unidad.

$$\begin{aligned} \text{Max: } U(x, y) &= 10x^{0.6}y^{0.4} \\ \text{s.a: } 20x + 30y &= 600 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Max: } U(x, y) &= 10x^{0.6}y^{0.4} \\ \text{s.a: } 20x + 30y &= 600 \end{aligned}} \right\}$$

$$\mathcal{L}(x, y) = 10x^{0.6}y^{0.4} + \lambda(20x + 30y - 600)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 10 \cdot 0.6 x^{-0.4} \cdot y^{0.4} + 20\lambda = 6 \left(\frac{y}{x} \right)^{0.4} + 20\lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 10x^{0.6} \cdot 0.4 y^{-0.6} + 30\lambda = 4 \left(\frac{x}{y} \right)^{0.6} + 30\lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 20x + 30y - 600 = 0$$

$$(1) \quad 6 \cdot \frac{y^{0.4}}{x^{0.4}} = -20\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{6}{20} \frac{y^{0.4}}{x^{0.4}} = -\frac{3}{10} \frac{y^{0.4}}{x^{0.4}} = -\frac{3}{10} \left(\frac{y}{x} \right)^{0.4}$$

$$(2) \quad 4 \frac{x^{0.6}}{y^{0.6}} = -30\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{4}{30} \frac{x^{0.6}}{y^{0.6}}$$

$$+\frac{3}{10} \frac{y^{0.4}}{x^{0.4}} = +\frac{4}{30} \frac{x^{0.6}}{y^{0.6}} \rightarrow 9y^{0.4} \cdot y^{0.6} = 4x^{0.6} \cdot x^{0.4}$$

$$9y = 4x \rightarrow y = \frac{4x}{9}$$

$$y = \frac{4x}{9}$$

$$\cancel{20}x + \cancel{30}y = \cancel{600} \quad \left. \begin{array}{l} y = \frac{4x}{9} \\ \cancel{20}x + \cancel{30}y = \cancel{600} \end{array} \right\} \quad 2x + \cancel{3} \frac{4x}{\cancel{9}3} = 60$$

$$\frac{6x + 4x}{3} = \frac{180}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 10x &= 180 \rightarrow x = 18 \\ y &= \frac{4 \cdot 18}{9} = 8 \\ d &= -\frac{3}{10} \left(\frac{8}{18} \right)^{0.4} \end{aligned}}$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 20 & \frac{-2^{1/4} \cdot 4^{0.4}}{x^{1.4}} & \frac{2^{1/4}}{x^{0.4} y^{0.4}} \\ 30 & \frac{2^{1/4}}{x^{0.4} y^{0.4}} & \frac{-2^{1/4} x^{0.6}}{y^{1.6}} \end{vmatrix} = 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \frac{2^{1/4}}{x^{0.4} y^{0.6}} + 30^2 \left(\frac{2^{1/4} 4^{0.4}}{x^{1.4}} \right) -$$

$$+ 20 \cdot 20 \left(\frac{2^{1/4} x^{0.6}}{y^{1.6}} \right) > 0$$

Máximo

$$b) \underset{x}{u}(18, \underset{y}{8}) = 10 (18)^{0.6} (8)^{0.4}$$

$$c) d = -\frac{3}{10} \left(\frac{8}{18} \right)^{0.4} \rightarrow \text{variación } \frac{3}{10} \left(\frac{8}{18} \right)^{0.4} \approx 0.2169$$

EJERCICIO 11

La función de costes de una empresa:

$$C(x, y) = -x + (y - 1)^2 + 10$$

Donde x e y son las cantidades de los factores A y B que se utilizan para obtener el producto Q. Fijado el nivel de producción de Q en 9 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene dada por la función de producción:

$$Q(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 \quad \text{con } x \geq 0, y \geq 0$$

Calcular la elección óptima del empresario si su objetivo es determinar la combinación de factores que minimizan el coste de la empresa.

La condición necesaria de óptimo:

$$-1 + 2\lambda x = 0$$

$$2(y-1) + 2\lambda(y-1) = 0$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

admite como solución $x = 3, y = 1, \lambda = \frac{1}{6}$

El hessiano orlado $\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2(y-1) \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2(y-1) & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix}$, para $x = 3, y = 1, \lambda = \frac{1}{6}$ toma el valor

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = -84 < 0 \text{ luego el punto } (3, 1) \text{ es mínimo local.}$$

EJERCICIO 12

Resuelva el problema $\text{Min } 4x^2 + y^2$
Sujeto a $2x + y = 5000$

Indicando el valor del multiplicador asociado a la solución.

¿Cuál será el efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo, si se incrementa en una unidad la constante de la restricción?

$$\mathcal{L}(x, y) = 4x^2 + y^2 + \lambda(2x + y - 5000)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 8x + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2x + y - 5000 = 0$$

$$x = 1250$$

$$y = 2500$$

$$\lambda = -5000$$

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0 \rightarrow P(1250, 2500)$$

mínimo
local

El efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo es proporcionalmente igual a 5000 $\rightarrow$ se reducirá en un aumento aproximado de 5000.



✉ INFO@ADEFACIL.COM |

Elena Gonzalo
☎ 671 227 871



WWW.ADEFACIL.COM