DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Conceptos de derivada direccional y parcial

Definición Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $e \in \mathbb{R}^n$ tal que $||e|| = 1$. Diremos que f es **derivable** en $x_0 \in G$ según la dirección del vector e si existe el límite:

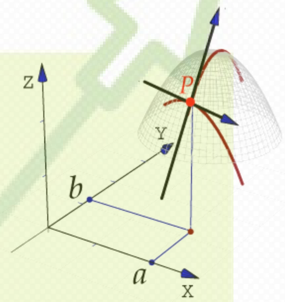
$$lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

Si este límite existe, le llamaremos **derivada de** f en x_0 **según la dirección del vector** e y lo denotaremos por $D_e f(x_0)$.

- **Derivada parcial**: Si el vector e es el vector de la base canónica e_i, entonces $D_e f(x_0) = D_i f(x_0)$ y se denomina derivada parcial i-ésima de f en x_0.
- **Definición formal**:

$$D_i f(x_0) = lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = lim_{t \to 0} \frac{f(x_{0_1}, ..., x_{0_i} + t, ..., x_{0_n}) - f(x_{0_1}, ..., x_{0_i}, ..., x_{0_n})}{t}$$

- **Notación**: Otra notación usual para la derivada parcial i-ésima es $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.



Interpretación y Cálculo

- **Velocidad y pendiente:** La derivada direccional nos está dando la velocidad de variación de f en la dirección del vector e y, por lo tanto, nos da también la **pendiente de la recta tangente** a la superficie en la **dirección** de dicho vector.
- **Regla de cálculo:** Para el cálculo de la derivada parcial respecto a una variable, las otras funcionan como **constantes**.

Ejemplo:

Si queremos calcular la derivada parcial respecto a y de la función $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 z$ en el punto $(1, 1, 2)$, tenemos que $f(1, y, 2) = 3 + 2y^2$ y la derivada respecto a y queda $4y$; en $y = 1$ el resultado es 4.

Por otra parte, $D_2 f(x, y, z) = 2yz$ y $D_2 f(1, 1, 2) = 4$.

Ejemplo **Cálculo de la derivada direccional**

Enunciado: Calcular la derivada de f en $x_0 = (0, 1)$ en la dirección del vector $(1, 1)$ siendo $f(x, y) = xy$.

Vector gradiente

Definición

Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f admite derivadas parciales en $x_0 \in G$. Llamamos **vector gradiente** de f en x_0 al vector formado por sus derivadas parciales:

$$\nabla f(x_0) = (D_1 f(x_0), ..., D_n f(x_0))$$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calcular la derivada de f en (0,0) en la dirección del vector (3,4):

2. Calcular la derivada de f en (0,0) en la dirección de un vector unitario genérico $e = (e_1, e_2)$:

3. Calcular el vector gradiente en (0,0):

1. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones para los puntos y vectores que se indican:

- (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x_0 = (3,2)$, $v = (1,-1)$.
- (b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{e^x + y^2}$, $x_0 = (0,1)$, $v = (-1,2)$.
- (c) $f(x,y) = \sin(2x - 3y)$, $x_0 = (0,0)$, $v = (v_1, v_2)$.
- (d) $f(x,y,z) = x + 2yz^2 - e^x$, $x_0 = (-1,1,0)$, $v = (-2,2,1)$.

2. Calcular la derivada direccional de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

en el origen de coordenadas y en la dirección del vector $(3,-5)$.

3. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a) $f(x,y)=xy+y\ln(xy)$.
- (b) $f(x,y)=xe^{-y^2}$.
- (c) $f(x,y)=\sin(xy)+\cos(x+y)$.
- (d) $f(x,y,z)=e^{2x+3y}\cos z$.
- (e) $f(x,y)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$.
- (f) $f(x,y,z)=\dfrac{2x-y+1}{3x+4y-5z}$.

4. Calcular el gradiente de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

- (a) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + 1}$ $\quad (-2, 3)$.
- (b) $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{x + 3}$, $\quad (-1, 0)$.
- (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{y^2 z^2}$, $\quad (9, 4, 2)$.
- (d) $f(x, y, z) = e^{x^3 y^4 z^5}$ $\quad (1, 1, 1)$.

Definición de función diferenciable

Definición

Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo G un conjunto abierto. Se dice que f es **diferenciable** en $x_0 \in G$ si y solo si existe el vector gradiente $\nabla f(x_0)$ y, además, se cumple que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), (x - x_0) \rangle|}{||x - x_0||} = 0$$

$\langle f(x_0), (x - x_0) \rangle = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \rightarrow$ producto escalar

O lo que es equivalente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), h \rangle|}{||h||} = 0$$

$\langle \nabla f(x_0), h \rangle = \nabla f(x_0) \cdot h \rightarrow$ producto escalar

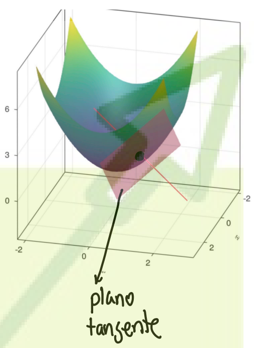
Diremos que f es diferenciable en G si es diferenciable en cada punto de G.

Definición

Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo G un conjunto abierto tal que f es diferenciable en $x_0 \in G$. Se llama **diferencial** de f en x_0 a la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ cuya matriz asociada es el $\nabla f(x_0)$; es decir:

$$Df(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longrightarrow Df(x_0)h = \nabla f(x_0) h$$



Se puede demostrar que la aplicación diferencial, si existe, es única.

Interpretación geométrica y Plano Tangente

Para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, la diferencial nos da el plano que, trasladado al punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, mejor aproxima a dicha superficie en un entorno de ese punto.

Dicho plano es el **plano tangente** a la gráfica de la función en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, y su ecuación viene dada por:

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

Lo que desarrollado en componentes resulta:

$$z = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ejemplo

Para la función definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, se cumple que:

1. **Su diferencial** en el punto $(2, 2)$ es la aplicación lineal:
2. **La ecuación del plano tangente** a su gráfica (una superficie) en el punto $(2, 2, 8)$ es:

Teorema 10

Sean $f, g : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f y g son diferenciables en $x_0 \in G$, entonces:

1. **Suma:** $f + g$ es diferenciable en x_0.

$$D(f+g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$$

2. **Producto por un escalar:** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, αf es diferenciable en x_0.

$$D(\alpha f)(x_0) = \alpha Df(x_0)$$

3. **Producto de funciones:** $f \cdot g$ es diferenciable en x_0.

$$D(f \cdot g)(x_0) = Df(x_0)g(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$$

4. **Cociente de funciones:** Si $g(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ es diferenciable en x_0.

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{Df(x_0)g(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

8. Calcular los planos tangentes a las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

- **a)** $f(x, y) = 3x^2 + y \operatorname{sen} x$ en el punto $x_0 = (\pi, 0)$
- **b)** $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{xy+y}$ en el punto $x_0 = (0, -2)$

2.3. Relación entre continuidad y diferenciabilidad de funciones reales. Funciones reales continuamente diferenciables.

- **Teorema 12**: Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.
- **Ejemplo 13**: La función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$ si $x \geq 0$ y $f(x, y) = -x + y$ si $x \leq 0$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y no es diferenciable en los puntos de la forma $(0, y)$.
- **Teorema 14**: Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es diferenciable en $x_0 \in G$ entonces:
  1. Existen todas las derivadas direccionales de f en x_0 ($D_e f(x_0)$).
  2. Se verifica que $D_e f(x_0) = \nabla f(x_0) e$ para todo vector unitario e.

Este teorema, para el caso particular de $n = 2$, nos indica que cuando f es diferenciable en un punto, todas las rectas tangentes a la gráfica de f en ese punto se pueden incluir en un plano, que será el plano determinado por la diferencial.

- **Ecuación del plano tangente:** La ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es $z = f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Además, si f es diferenciable, podemos calcular las velocidades de variación en la dirección de un vector cualquiera conociendo las velocidades de variación en la dirección de la base canónica. Dado que $\nabla f(x_0) e = \|e\| \cdot \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos\alpha = \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos\alpha$, siendo α el ángulo entre el vector e y el vector gradiente, se puede analizar el comportamiento de la derivada direccional:

Ángulo	Relación entre $\nabla f(x_0)$ y e	$\cos\alpha$	D. direccional	Valor
$\alpha = 0$	Paralelos (misma dirección y sentido)	1	Máxima	$\|\nabla f(x_0)\|$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$	Perpendiculares	0	Nula	0
$\alpha = \pi$	Paralelos (misma dirección, sentido opuesto)	-1	Mínima	$-\|\nabla f(x_0)\|$
$\alpha = \frac{3\pi}{2}$	Perpendiculares	0	Nula	0

- **Definición 16**: Una función $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice continuamente diferenciable en $x_0 \in G$ si las funciones derivadas parciales $D_i f$ están definidas en una bola $B(x_0) \subset G$ y son continuas en x_0. Si esto ocurre en cada punto de un abierto G, se dice que f es de clase 1 en G ($f \in C^1(G)$).
- **Teorema 17**: Si f es continuamente diferenciable en x_0, entonces f es diferenciable en x_0. Este resultado da una condición suficiente de diferenciabilidad, pero no necesaria.

5. Calcular las funciones derivadas parciales y estudiar la diferenciabilidad de la función:

$$\boldsymbol{f(x,y)} = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq (\mathbf{0},\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & \text{si } (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \end{cases}$$

6. Dada la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcular el incremento real de la función al pasar del punto (10, 10, 10) al (11, 11, 11) y la aproximación que de este incremento nos da la diferencial.

7. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y^2 & \text{si } x>y \\ x-y^2 & \text{si } x\le y \end{cases}$$

calcular, si es posible, la derivada parcial de f respecto a x en (2,1), la derivada parcial de f respecto a y en (1,3) y la derivada parcial de f respecto a x en (2,2).

9. Calcular las derivadas direccionales máxima y mínima, indicando en qué dirección se producen, en los siguientes casos:

- **a)** $f(x,y)=\dfrac{\cos(x-y)}{x+1}$ en $x_0=(0,2\pi)$.
- **b)** $f(x,y)=e^{x+y^2}$ en $x_0=(0,0)$.

2.4. Matriz Jacobiana. Diferenciación de funcións vectoriais.

Cuestiones previas (repaso).

Definición 19 Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es de la forma:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longrightarrow f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

Las funciones componentes de f son para j = 1, 2, ... , m

$$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Ejemplo 20 Sea f la aplicación definida por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longrightarrow & f(x, y, z) = (\cos x + z, ye^{x+y}, x^2 + z^3, zy) \end{array}$$

Sus funciones componentes son:

Una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene asociada una matriz $A \in M_{m\times n}$ de tal manera que $f(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$. Para construir la matriz A se ponen las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ en columnas. La matriz A se llama la matriz asociada a la aplicación lineal f.

Ejemplo 21 Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (2x + 5y, 4x - 2y, y - x)$$

Definición 22 Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in G$ tales que existen las derivadas parciales $D_i f_j(x_0)$ para cada i=1, . . . ,n y cada j=1, . . . ,m. Se le llama **matriz Jacobiana** de f en x_0 a la matriz de orden $m \times n$:

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x_0) & \cdots\cdots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & \cdots\cdots & D_n f_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

También se puede expresar de forma abreviada utilizando los vectores gradientes de cada función componente:

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

- El vector gradiente es una generalización de la derivada.
- La matriz Jacobiana es una generalización del vector gradiente.

Definición 23 Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ siendo G un conjunto abierto. Diremos que f es **diferenciable** en $x_0 \in G$ si y solo si existe la matriz $Jf(x_0)$ y además:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Jf(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

o lo que es equivalente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Jf(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

Diremos que f es diferenciable en G si es diferenciable en cada punto de G.

Definición 24 Sea $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ siendo G un conjunto abierto tal que f es diferenciable en $x_0 \in G$, se llama **diferencial** de f en x_0 a la aplicación lineal:

$$Df(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$h \longrightarrow Df(x_0)(h) = Jf(x_0)h$$

Dicho de otra manera, la diferencial de f en x_0 es la aplicación lineal que tiene como matriz asociada a la matriz Jacobiana de f en x_0.

10. Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

- **a)** $f(x, y) = (x^2 - y, 0, \sin(xy), e^{2y})$, $x_0 = (0, -1)$.
- **b)** $f(x, y, z) = (\ln(xy), xz + y^2, \dfrac{z - y}{z - x} + \dfrac{\pi}{4} - 1)$, $x_0 = (1, 1, \dfrac{\pi}{3} - 1)$.
- **c)** $f(x, y, z) = (\sin(xy), (\cos x)(\cos(2z + 3y)))$, $x_0 = (0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4})$.

2.5. Relación entre continuidad y diferenciabilidad de funciones vectoriales. Aplicaciones continuamente diferenciables.

Se puede demostrar que $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x_0 \in G$ si y solo si $f_1, ..., f_n$ son diferenciables en x_0 y además:

$$Df(x_0) = (Df_1(x_0), ..., Df_m(x_0))$$

Por lo tanto:

$$Df(x_0)(e_1) = (Df_1(x_0)(e_1), ..., Df_m(x_0)(e_1)) = (D_1f_1(x_0), ..., D_1f_m(x_0))$$

$$\vdots$$

$$Df(x_0)(e_n) = (Df_1(x_0)(e_n), ..., Df_m(x_0)(e_n)) = (D_nf_1(x_0), ..., D_nf_m(x_0))$$

Y como la matriz asociada a $Df(x_0)$ es $Jf(x_0)$ se obtiene lo que ya sabemos, que:

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} D_1f_1(x_0) & \cdots & D_nf_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1f_m(x_0) & \cdots & D_nf_m(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

Definición 25 Una aplicación $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice continuamente diferenciable en $x_0 \in G$ si son continuamente diferenciables en x_0 sus funciones componentes.
f se dice continuamente diferenciable en G si es continuamente diferenciable en cada $x_0 \in G$. En tal caso se dice que f es de clase 1 en G y se denota por $f \in C^1(G)$.

Evidentemente si una aplicación $f : G \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continuamente diferenciable en x_0 es diferenciable en x_0 puesto que sus funciones componentes son continuamente diferenciables y por lo tanto diferenciables.

Ejemplo 26 Dada la aplicación:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y) = (x^2 + y, y^3 - x, xy)$$

calcular la expresión de su diferencial en $(3, 2)$ y calcular $Df(3, 2)(-1, -2)$.

Ejemplo 27 En el caso particular de:

$$f:(a,b)\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

$$x\longrightarrow f(x)=(f_1(x),...,f_m(x))$$

resulta:

$$Jf(x)=\begin{pmatrix} f_1^{'}(x)\\ \vdots \\ f_m^{'}(x)\end{pmatrix}$$

Sea:

$$f:(0,+\infty)\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^4$$

$$x\longrightarrow f(x)=(\ln(x),x^3,2,\cos(x))$$