FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1.1 Funciones escalares y vectoriales. Curvas de nivel

Definición 1.1 Una **función real de n variables reales** (también llamada función escalar) es cualquier aplicación:

Una función puede estar definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$. En ese caso escribiremos $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $n = 1$ se trata de una función real de una variable real.

Definición 1.2 Se llama **dominio** de la función f al conjunto:

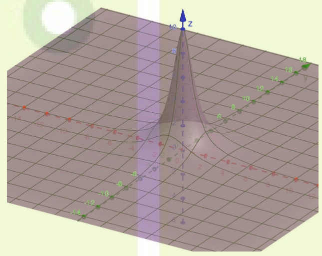
$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / \exists f(x)\}$$

Se llama **conjunto imagen** de la función f al conjunto:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x),\ \text{para algn}\ x \in Dom(f)\}$$

Exemplo 1.1

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{10}{x^2 + y^2 + 1}$$



1. Calcular y representar el dominio de definición de las siguientes funciones:

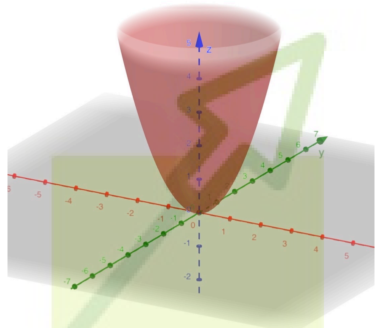
a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-9)$
c) $f(x,y) = \sqrt{(x+1)(y-2)}$
d) $f(x,y) = \ln(xy+x^2)$
e) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
f) $f(x,y) = e^{x/y}$

Definición 1.3

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y una constante $k \in \mathbb{R}$, se define la curva de nivel k de f como el conjunto de todos los puntos que tienen imagen igual a k:

$$C_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = k\}$$

Las curvas de nivel de una función de utilidad se llaman curvas de indiferencia y las de una función de producción, isocuantas.



2. Calcular y dibujar algunas curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
b) $f(x,y) = x^2 - 2y$
c) $f(x,y) = x + y$
d) $f(x,y) = xy$
e) $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$

Definición 1.4

Una función vectorial de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es toda aplicación:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Siendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subset \mathbb{R}^n$
$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$

Toda aplicación $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ determina m funciones reales (o escalares):

$$\begin{aligned} f_j : A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y_j = f_j(x) \qquad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

que se llaman funciones componentes de la función $\boldsymbol{f}$.

El dominio y el conjunto imagen de una función vectorial se definen de manera análoga a los de una función real.

1.1.1 Operaciones con funciones (reales y/o vectoriales)

1. Suma: Dadas dos aplicaciones del mismo tipo $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se pueden sumar y la suma $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} : \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ viene dada por:

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$$

2. Producto por un escalar: Dada una aplicación $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un escalar $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ se define la aplicación $(\boldsymbol{\lambda f}) : \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$(\boldsymbol{\lambda f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda f}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$$

El conjunto $\{\boldsymbol{f} / \boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\}$ con las operaciones suma y producto por un escalar tiene estructura de espacio vectorial.

3. Producto de funciones: Dadas dos funciones $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define la función producto $(f \cdot g) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in A$$

Nota: Esta propiedad solo es válida para funciones reales ($m = 1$).

4. Composición de aplicaciones: Dadas dos aplicaciones $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ con $f(A) \subset B$, existe la aplicación compuesta $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ definida por:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)], \quad \forall x \in A$$

5. Inversa de una aplicación: Dada $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se define su inversa como $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = id_{f(A)}$$

La inversa existe si y solo si f es biyectiva.

Nota: Todas las propiedades (salvo la 3) son válidas tanto para funciones vectoriales como para funciones reales.

1.2 Límites

En lo que sigue, denotaremos por A el dominio de definición de una función (o aplicación) f, y por a un punto de acumulación de A (o $a \in A$).

Definición 1.5

Dada una función (real) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y un punto $a \in A$, se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en el punto a, y se denota $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in B^*(a, \delta) \cap A \text{ se verifica que } f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

O, dicho de otro modo, si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in A, x \neq a, ||x - a|| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Definición 1.6

Dada una función (vectorial) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un punto $a \in A$, se dice que l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m es el límite de la función f en el punto a, y se denota $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in A, x \neq a, ||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - l|| < \epsilon$$

Teorema 1.1

Dada una función (vectorial) $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un punto $a \in A'$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$
verifica que: $\lim_{x \to a} f(x) = (l_1, l_2, \dots, l_m) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_j(x) = l_j \quad \forall j \quad 1 \leq j \leq m$

Es decir, para calcular el límite de una función vectorial tenemos que calcular los límites de sus funciones (reales) componentes.

Teorema 1.2

El límite de una función real o vectorial en un punto, si existe, es único.

1.2.1 Operaciones con límites

En lo que sigue, supondremos que las funciones f y g cumplen los requisitos necesarios para que se puedan realizar las operaciones indicadas. Además, denotaremos por a un punto de su dominio de definición que es también de acumulación de este; y supondremos que existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$. Entonces, se verifica:

1. **Suma/Resta:**

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

2. **Producto por escalar:**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to a} [\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x \to a} f(x)$$

3. **Producto:**

$$\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

4. **Cociente:**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Siempre que $g(x) \neq 0, \forall x$, y que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

5. **Potencia:**

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim_{x \to a} g(x)}$$

6. **Logaritmo:**

$$\lim_{x \to a} \ln[f(x)] = \ln[\lim_{x \to a} f(x)]$$

1.2.2 Cálculo de límites

Para calcular estos límites, en general, sustituiremos las componentes del punto en el que calculamos el límite en las correspondientes variables.

Por ejemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y}{x+y} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

Al calcular estos límites, al igual que en las funciones de una variable, pueden aparecer indeterminaciones (por ejemplo, el cociente anterior cuando $(x, y) \to (0, 0)$ resulta $0/0$).

Es entonces cuando aparecen diferencias con el caso de funciones de una variable. Mientras que en estas solo cabe aproximarse al punto por la derecha y por la izquierda, ahora podremos hacerlo de infinitas maneras distintas a través de todas las "curvas" (entendiendo por tales todas las funciones continuas: rectas, parábolas, etc.) que, perteneciendo al dominio de definición de la función, pasan por el punto.

Es evidente que no podemos calcular el límite a través de las infinitas trayectorias posibles. Haciéndolo para algunas concretas podremos concluir que el límite **no existe** si a través de distintas trayectorias obtenemos resultados distintos o conocer su valor, si existe. En este último caso (existencia de límite) se puede confirmar empleando la definición.

Veámoslo con más detalle para funciones de dos variables.

1. Límites reiterados de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{x\to x_0} \left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$$

$$\lim_{y\to y_0} \left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

Ejemplo: $f(x,y) = \dfrac{x+y-3}{y-1}$ en $(x_0, y_0) = (2, 1)$

$$\lim_{x\to 2} \left[\lim_{y\to 1} \frac{x+y-3}{y-1}\right] = \lim_{x\to 2} \left[\lim_{y\to 1} \frac{x-2}{y-1}\right] = \lim_{x\to 2} \infty = \infty$$

$$\lim_{y\to 1} \left[\lim_{x\to 2} \frac{x+y-3}{y-1}\right] = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y-1} = 1$$

¡OBSERVACIÓN MUY IMPORTANTE!
Una función puede tener límite en un punto y no existir alguno de los límites reiterados en ese punto.

1. **Si $L_1 = 5$ y $L_2 = 8$ (Distintos):** El límite global **NO** existe.
2. **Si $L_1 = 1$ y $L_2 = \infty$ (Distintos):** El límite global **NO** existe (es tu caso).
3. **Si $L_1 = 5$ y $L_2 = 5$ (Iguales):** El límite global **PUEDE** existir (y si existe, vale 5), pero hay que comprobarlo.
4. **Si $L_1 = 5$ y L_2 "no se puede calcular" (Error/Oscila):** Aquí es donde aplica la observación: el límite global **podría** existir y valer 5, aunque el método reiterado haya fallado.

2. Límites direccionales de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto

Se dice que f tiene límite en el punto a en la dirección del vector v si existe el siguiente límite:

$$\lim_{t \to 0} f(a + tv)$$

Caso particular para funciones reales de 2 variables:

Límites direccionales de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un punto (x_0, y_0).

Alternativamente, puesto que $y = y_0 + m(x - x_0)$ es la ecuación de la recta de pendiente $m \in \mathbb{R}$ que pasa por el punto (x_0, y_0), al dejar m como un parámetro estaremos calculando el límite a través de todas las rectas (salvo la vertical) que pasan por (x_0, y_0).

Por lo tanto, los límites direccionales de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto (x_0, y_0) también se podrán obtener a partir de la siguiente expresión:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} f[x, y_0 + m(x - x_0)]$$

Y, por último, el límite de la función en el punto (x_0, y_0) en dirección vertical se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} f(x_0, y)$$

3. Límites según trayectorias parabólicas de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Puesto que la ecuación general de las parábolas (de eje vertical/horizontal) que pasan por el punto (x_0, y_0) es:

- $$y - y_0 = k(x - x_0)^2 \iff y = y_0 + k(x - x_0)^2$$
- $$x - x_0 = k(y - y_0)^2 \iff x = x_0 + k(y - y_0)^2$$

Donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

Los límites de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ según las parábolas anteriores serán, respectivamente:

$$\lim_{x \to x_0} f[x, y_0 + k(x - x_0)^2]$$

$$\lim_{y \to y_0} f[x_0 + k(y - y_0)^2, y]$$

EJERCICIO. Calcula si existen los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ d) $\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x-1}{x+y-4}$

1.3 Continuidad

Definición 1.7

Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $a \in A \cap A$ si y solo si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in A, ||x - a|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Una función es continua en un conjunto contenido en su dominio si es continua en todos los puntos de ese conjunto.

Una función vectorial es continua en un punto a si son continuas en ese punto todas sus funciones componentes.

3. Límites según trayectorias parabólicas de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Puesto que la ecuación general de las parábolas (de eje vertical/horizontal) que pasan por el punto (x_0, y_0) es:

- $$y - y_0 = k(x - x_0)^2 \iff y = y_0 + k(x - x_0)^2$$
- $$x - x_0 = k(y - y_0)^2 \iff x = x_0 + k(y - y_0)^2$$

Donde $k \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

Los límites de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ según las parábolas anteriores serán, respectivamente:

$$\lim_{x \to x_0} f[x, y_0 + k(x - x_0)^2]$$

$$\lim_{y \to y_0} f[x_0 + k(y - y_0)^2, y]$$

Teorema 1.4

Si f y g son dos funciones que se pueden componer, f es continua en un punto a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$$
$$a \longmapsto f(a) \longmapsto g(f(a))$$

Observación 1.2

Las funciones elementales:

$$f(x) = k, \ln(x), x^n, a^x (a > 0), \sin(x), \cos(x), \tan(x)$$

son continuas en todos los puntos de su dominio de definición.

Las funciones lineales y los polinomios también son funciones continuas.

a) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x^2+y^2}{xy}} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$ en $(0,0)$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2+y^3}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ en $(0,0)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}y^3}{x^2\sqrt{x}+y^5} & \text{se } y^5 \neq -x^{\frac{5}{2}} \\ 0 & \text{se } y^5 = -x^{\frac{5}{2}} \end{cases}$ en $(0,0)$

EJERCICIO**.** Demuestra que las siguientes funciones reales no son continuas en los puntos indicados

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xysen\dfrac{1}{3x^2+4y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Comprueba que existen los límites direccionales en el $(0,0)$ y son todos nulos, y sin embargo la función no es continua en el $(0,0)$. (Sugerencia: calcula el límite a través de la curva $x = y^4$).

EJERCICIO: Demuestra que la siguiente función es continua en el origen

EJERCICIO.

a) $f(x,y) = e^{x^2+y^2} + x^2 - 2$

b) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 + e^x\right)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{se } (x,y) \neq (1,1) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (1,1) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} 3x^2 + y & \text{se } x \neq 1 \\ -2y^2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} 2y^3 - x^3 & \text{se } y > x^2 \\ y - 3 & \text{se } y \leq x^2 \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} & \text{se } x \neq 0, y \neq 0 \\ x & \text{se } x \neq 0, y = 0 \\ y^2 & \text{se } x = 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, y = 0 \end{cases}$

EJERCICIO. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x - y & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ C & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-1} & \text{se } (x,y) \neq (1,2) \\ \\ C & \text{se } (x,y) = (1,2) \end{cases}$

EJERCICIO: Calcula , si es posible, el valor de C para que las siguientes funciones sean continuas.