1. Cinemática del punto y de los sistemas

Cinemática: Es la rama de la mecánica encargada del estudio del movimiento de un objeto y las causas que lo generan

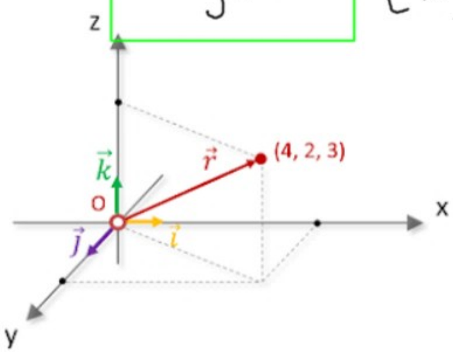
Variables cinemáticas:

1) Posición
2) Velocidad
3) Aceleración

1) Posición: Es el vector que indica la ubicación de un punto u objeto en el espacio respecto a un punto de referencia fijo

$$\boxed{\vec{r} = \int \vec{v}\, dt} \quad [m]$$

$$y = \frac{x^2}{4} + 3$$



$$\vec{r} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \quad [m]$$

Desplazamiento: Se define como la variación de posición entre dos puntos $\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0}$ $[m]$

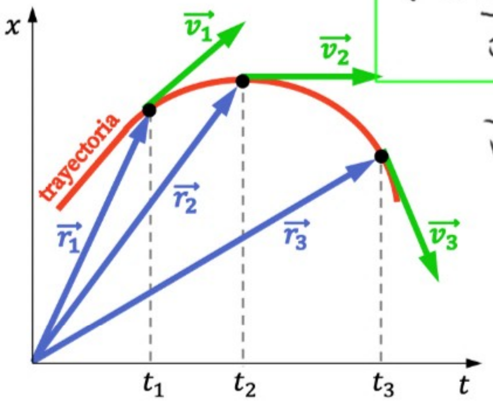
Distancia: Es el módulo del desplazamiento $\boxed{|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_f - \vec{r}_0|}$ $[m]$

Trayectoria: Es el tipo de curva descrita por la partícula u objeto $\boxed{y = f(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = t^2 + 3 \end{array}\right\} \; y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3$$

2) <u>Velocidad</u>: Es el vector que describe la tasa de cambio de la posición (desplazamiento) de un objeto respecto al tiempo

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{V} = \int \vec{a}\, dt$$



$$\vec{V} \rightarrow [m/s]$$

<u>Rapidez</u>: Es el módulo del vector velocidad

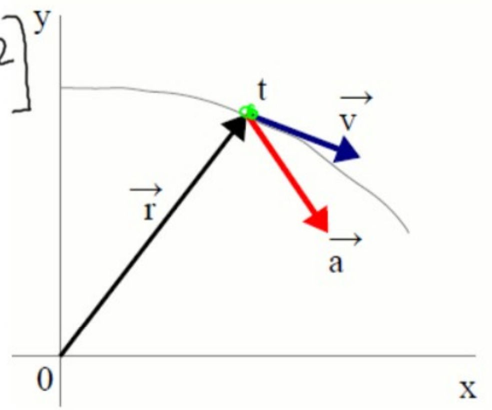
$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad [m/s]$$

<u>Velocidad media</u>: Es el cociente del desplazamiento total entre la variación de tiempo total

$$\vec{V}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_F - \vec{r}_0}{t_F - t_0} \quad [m/s]$$

3) <u>Aceleración</u>: Es el vector que describe la tasa de cambio de la velocidad de una partícula u objeto en función del tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad [m/s^2]$$

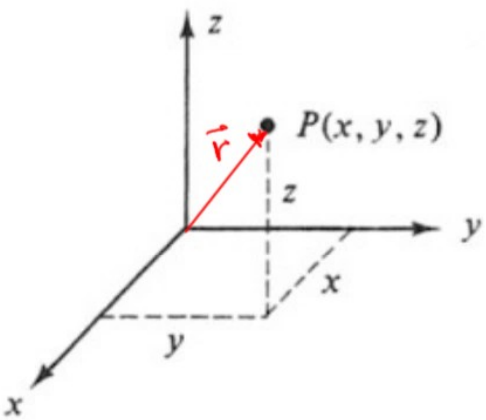


<u>Aceleración Media</u>: Es el cambio total de la velocidad de un objeto durante un intervalo de tiempo en específico

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{V}_F - \vec{V}_0}{t_F - t_0} \quad [m/s^2]$$

Tipos de Coordenadas

1) Coordenadas Cartesianas:



$$\boxed{\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}$$

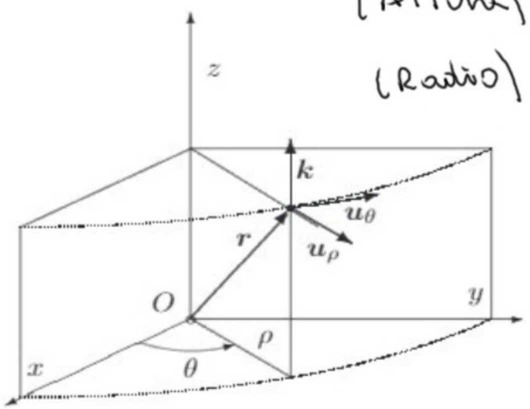
$$\boxed{|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\boxed{a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2}$$ (Aceleración radial)

$$\boxed{a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}}$$ (Aceleración radial).

$$\boxed{a_z = \ddot{z}}$$ (Aceleración que depende de altura)

2) Coordenadas Cilíndricas:



(Altura) $0 \leq z < \infty$

(Radio) $0 \leq \rho < \infty$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ (Angular)

$$\boxed{\vec{r} = \rho\hat{u}_\rho + z\hat{k}}$$ (Posición) $r \longrightarrow \dot{r} \longrightarrow \ddot{r}$

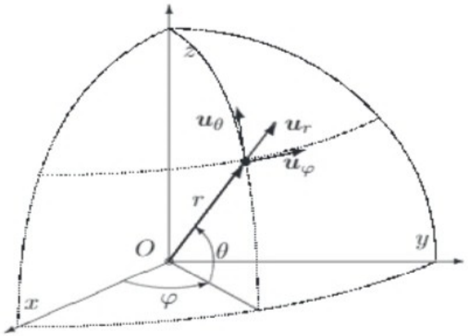
$$\boxed{\dot{r} = \dot{\rho}\hat{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{z}\hat{k}}$$ (Velocidad)

$$\boxed{\ddot{r} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{u}_\theta + \ddot{z}\hat{k}}$$ (Aceleración)

3) Coordenadas Esféricas:

$\boxed{0 \leq r < \infty}$ (Radio) $\boxed{0 \leq \theta \leq \pi}$ (Ángulo polar ó colatitud)

$\boxed{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$ (Ángulo azimutal)



$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta + r\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{u}_\varphi}$$ (Velocidad)

$$\boxed{\vec{r} = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi\,\hat{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}}$$ (Posición)

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} = {} & \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + r\ddot{\theta}\right)\hat{u}_\theta \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\text{sen}\,\theta + r\ddot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{u}_\varphi\end{aligned}}$$

r = distancia radial
θ = Ángulo polar
φ = " azimutal
$\dot{r}$ = velocidad radial
$\dot{\theta}$ = Velocidad Angular polar
$\dot{\varphi}$ = Velocidad Angular azimutal
$\ddot{r}$ = Aceleración radial
$\ddot{\theta}$ = Aceleración angular polar
$\ddot{\varphi}$ = Aceleración Angular azimutal

Componentes intrínsecas de la aceleración

1) Aceleración Tangencial:

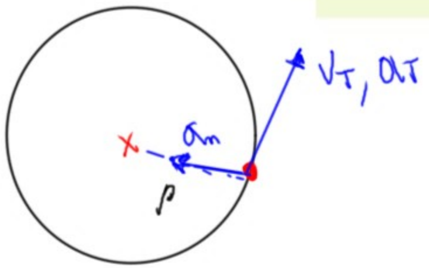
Es tangente a la trayectoria, se define como el cociente de la variación de la rapidez entre la variación de tiempo.

$$\boxed{a_T = \frac{d|\vec{V}|}{dt}} \quad [m/s^2]$$

$\vec{\alpha}$ = Aceleración Angular $[rad/s^2]$

2) Aceleración Radial:

Apunta en dirección del eje de rotación, determina el cambio de dirección de la velocidad.

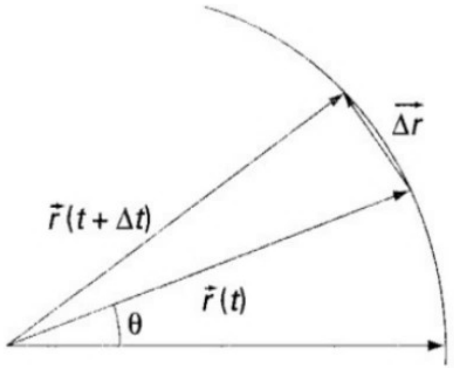


$$\boxed{a_n = \frac{V^2}{\rho}} \quad [m/s^2]$$

$$\boxed{|\vec{a}| = \frac{d|\vec{V}|}{dt}\hat{\theta} + \frac{V^2}{\rho}\hat{r}}$$

(Aceleración lineal) $[m/s^2]$

Velocidad Areolar: Se define como el área barrida por la posición en la unidad de tiempo



$$\boxed{V_A = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v})}$$

$$\boxed{|\vec{v}| = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}}$$ (En coordenadas polares)

Sistemas Indeformables: La distancia entre dos puntos P y Q permanece constante, aunque ambos puntos se muevan respecto del tiempo

3. Un móvil describe con velocidad constate de módulo v la hélice cuyas coordenadas en coordenadas cilíndricas son

$x = R\cos\theta$
$y = R\ \text{sen}\ \theta$
$z = \sqrt{3}R\ \theta$

En el instante inicial el móvil se encuentra en el punto de coordenadas $(0, R, \frac{\sqrt{3}}{2}R\pi)$. Determinar:

a) La expresión de θ en función del tiempo.
b) Componentes intrínsecas de la aceleración.
c) Radio de curvatura de la trayectoria.

$$\boxed{\vec{r} = (R\cos\theta)\hat{i} + (R\,\text{sen}\,\theta)\hat{j} + (\sqrt{3}R\theta)\hat{k}}$$

a) $$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\left[(-R\,\text{sen}\,\theta)\hat{i} + (R\cos\theta)\hat{j} + (\sqrt{3}R)\hat{k}\right]$$

• Rapidez: $$|\vec{V}| = \dot{\theta}\sqrt{(-R\,\text{sen}\,\theta)^2 + (R\cos\theta)^2 + (\sqrt{3}R)^2} = \dot{\theta}\sqrt{R^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 3R^2} = \dot{\theta}\sqrt{R^2+3R^2}$$

$$|\vec{V}| = \dot{\theta}\sqrt{4R^2} \Rightarrow V = \dot{\theta}(2R) \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{2R}} \Rightarrow \int d\theta = \int \frac{V}{2R}dt \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{Vt}{2R} + C}$$

• Para $x = R\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi}$ • Para $y = R\,\text{sen}\,\theta = R \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi}$

• Para $z = \cancel{\sqrt{3}}\cancel{R}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}R\pi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \theta(t) = \frac{Vt}{2R} + \frac{\pi}{2}$

b) $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\left[(-R\cos\theta)\dot{\theta}\hat{i} + (-R\,\text{sen}\,\theta)\dot{\theta}\hat{j} + 0\hat{k}\right] = -\dot{\theta}^2\left[(R\cos\theta)\hat{i} + (R\,\text{sen}\,\theta)\hat{j}\right]$$

3. Un móvil describe con velocidad constate de módulo v la hélice cuyas coordenadas en coordenadas cilíndricas son

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\,\text{sen}\,\theta$$
$$z = \sqrt{3}R\,\theta$$

En el instante inicial el móvil se encuentra en el punto de coordenadas $(0, R, \frac{\sqrt{3}}{2}R\pi)$. Determinar:

a) La expresión de θ en función del tiempo.
b) Componentes intrínsecas de la aceleración.
c) Radio de curvatura de la trayectoria.

$$\vec{a} = -\left(\frac{V}{2R}\right)^2 \left[(R\cos\theta)\hat{\imath} + (R\,\text{sen}\,\theta)\hat{\jmath}\right]$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{-V^2}{4R^2}\left[(R\cos\theta)\hat{\imath} + (R\,\text{sen}\,\theta)\hat{\jmath}\right]} \; , \; \boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_n^2}}$$

• Si V = constante $\Rightarrow a_T = 0\,m/s^2$

$$a_n = |\vec{a}| = \left| \frac{-V^2}{4R^2}\left[(R\cos\theta)\hat{\imath} + (R\,\text{sen}\,\theta)\hat{\jmath}\right] \right| = \frac{V^2}{4R^2}\sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\,\text{sen}\,\theta)^2} = \frac{V^2}{4R^{\cancel{2}}}\sqrt{\cancel{R^2}}$$

$$a_n = \frac{V^2}{4R}\,m/s^2 \qquad \vec{a} = \left(0\,\hat{\theta} + \frac{V^2}{4R}\hat{\rho}\right) m/s^2$$

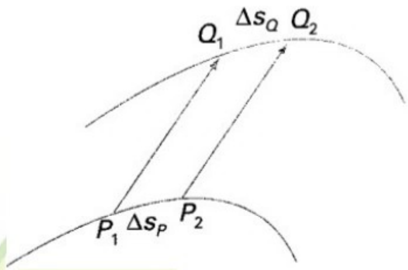
c) $$\boxed{a_n = \frac{V^2}{\rho}} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\cancel{V^2}}{\frac{\cancel{V^2}}{4R}} = 4R$$

Eje instántaneo de rotación y deslizamiento máximo

1) Movimiento de traslación:

Para un sistema indeformable al movimiento de dos puntos que cumplen:

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{PQ}}{dT} = 0}$$



2) Movimiento de rotación:

Cuando dos puntos A y B durante el movimiento permanecen fijos. La recta AB se denomina como: Eje de rotación

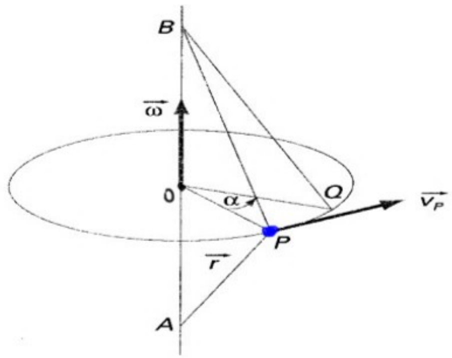
$$\boxed{\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ (Velocidad tangencial) [m/s]

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dT}} \qquad \boxed{\vec{\omega} = \int \vec{\alpha}\, dT}$$

$\theta \rightarrow$ [rad]

$\alpha \rightarrow$ [rad/s²]

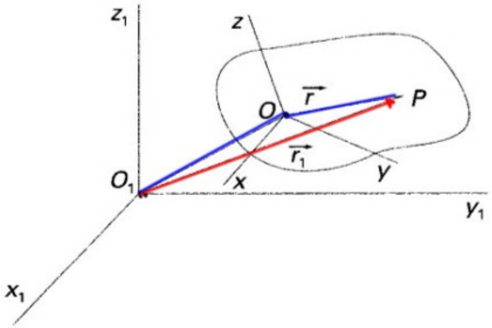
Velocidad angular [rad/s]



Distribución de velocidades y movimiento relativo

$$\boxed{\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1O} + \vec{r}}$$

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$$

Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo

El eje instantáneo de rotación y deslizamiento, se define como la recta donde la velocidad es mínima y paralela a la velocidad angular, generando un movimiento helicoidal, representa el lugar geométrico de los puntos con velocidad mínima

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} = V_{Ox}\hat{i} + V_{Oy}\hat{j} + V_{Oz}\hat{k} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{V}_P = \frac{V_{Ox} + \omega_y(z-z_0) - \omega_z(y-y_0)}{\omega_x} = \frac{V_{Oy} + \omega_z(x-x_0) - \omega_x(z-z_0)}{\omega_y} = \frac{V_{Oz} + \omega_x(y-y_0) - \omega_y(x-x_0)}{\omega_z}}$$

1.4 Un sólido indeformable está sometido en un cierto instante a las siguientes rotaciones: $\vec{\omega}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{\omega}_2 = -\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{\omega}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, aplicadas, en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$, respectivamente. Determinar:

a) Rotación instantánea del sistema.
b) Velocidad de deslizamiento mínimo.
c) Eje instantáneo de rotación.

a) $\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3}$

$\vec{\omega} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

b) $\boxed{\vec{V}_p = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}}$

$\boxed{\vec{V}_0 = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_A) + (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_B) + (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_C)}$

$\vec{r}_A = \hat{i}, \quad \vec{r}_B = \hat{j}, \quad \vec{r}_C = \hat{k}$

$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_A = (\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) \times \hat{i} = (-\hat{j} + 2\hat{k})$

$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_B = (-\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) \times \hat{j} = (\hat{i} - \hat{k})$, $\vec{V}_0 = (-\hat{j} + 2\hat{k}) + (\hat{i} - \hat{k}) + (-\hat{i} - \hat{j})$

$\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_C = (\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \times \hat{k} = (-\hat{i} - \hat{j})$

$\boxed{\vec{V}_0 = -2\hat{j} + \hat{k}}$

$\boxed{\vec{V}_{min} = \text{Proj}_{\vec{\omega}} \vec{V}_0}$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_{min} = \dfrac{\vec{V}_0 \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \cdot \vec{\omega} = \dfrac{(-2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{\left(\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}\right)^2} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \dfrac{(-2+1)}{3} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$\vec{V}_{min} = -\dfrac{1}{3} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

c) $\boxed{\vec{V}_p = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_p}$ $\quad \boxed{\vec{r}_p = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = [(z-y)\hat{i} - (\hat{j}(z-x)) + \hat{k}(y-x)]$$

$\vec{V}_p = (-2\hat{j} + \hat{k}) + [(z-y)\hat{i} + (x-z)\hat{j} + (y-x)\hat{k}] = (z-y)\hat{i} + (x-z-2)\hat{j} + (y-x+1)\hat{k}$

$$\vec{V}_p \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ (z-y) & (x-z-2) & (y-x+1) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow [(2x-y-z-3)\hat{i} + (-(x-2y+z-1)\hat{j}) + \hat{k}(-x-y+2z+2)]$$

$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\begin{cases} (2x-y-z-3)\hat{i} = 0\hat{i} \\ (-x+2y-z+1)\hat{j} = 0\hat{j} \\ (-x-y+2z+2)\hat{k} = 0\hat{k} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$