info@tuacademiafacil.com

▪ **Ejercicio.** Estudiar la continuidad de la función f: ℝ → ℝ definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{x^2 + x^{2n}\,\mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1}}_{f_n(x)}.$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x>1 \\ x<-1}} x^{2n} \longrightarrow +\infty$$

(Cálculo I · Grado en Ingeniería eléctrica · Universidad de Vigo · Jaime Díaz de Bustamante)

1º Estudio de la convergencia puntual.

$\boxed{x<-1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$\boxed{x=-1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\mathrm{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right)}{1+1} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$

$\boxed{-1<x<0}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1} = \frac{x^2 + 0\cdot \text{ACOTADO}}{0+1} = x^2$

$\boxed{x=0}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1} = \frac{0 + 0\cdot \text{ACOTADO}}{0+1} = 0$

$\boxed{0<x<1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1} = \frac{x^2 + 0\cdot \text{ACOTADO}}{0+1} = x^2$

$\boxed{x=1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1} = \frac{1+\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+1} = \frac{1+1}{2} = 1$

$\boxed{x>1}$ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\cdot \mathrm{sen}(\pi x/2)}{x^{2n}} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

x^2 si $-1 < x < 1$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2º Estudio de la continuidad en $x = -1$.

1. $f(-1) = 0$
2. $f(-1^-) = \lim_{x \to -1^-} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$

   $f(-1^+) = \lim_{x \to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1$

   $\nexists \lim_{x \to -1} f(x)$

por tanto, f es DISCONT. de SALTO FINITO en $x = -1$.

3º Estudio de la continuidad en $x = 0$.

1. $f(0) = 0$
2. $f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

   $f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$

   $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$
3. $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$

   f CONT. en $x = 0$.

4º Estudio de la continuidad en $x = 1$.

1. $f(1) = 1$
2. $f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1$

   $f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

   $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

$f(1) = 1 = \lim_{x \to 1} f(x)$

f CONT. en $x = 1$.

5º f es CONT. en $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) = \mathbb{R} - \{-1\}$

6º Si preguntaran la convergencia puntual.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

x^2 si $-1 < x \leq 1$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ si $x \geq 1$

7º Estudio de la convergencia uniforme.

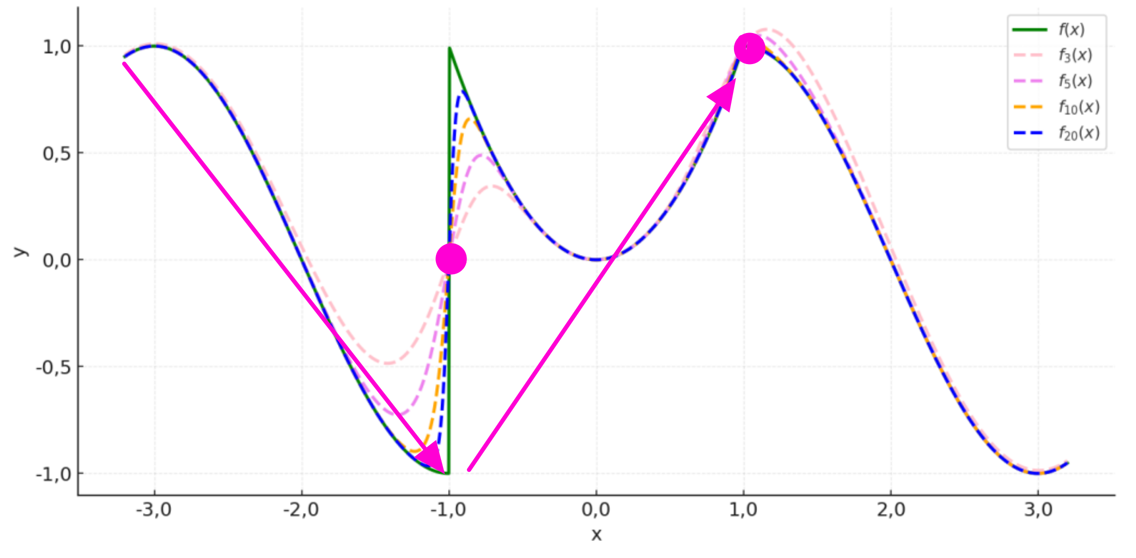
TEOREMA 1.6: (p.61) Si las f_n que conforman una sucesión de funciones CONT. en D y CONV. UNIFORMEMENTE en D a la función límite f, entonces f es CONT. en D.

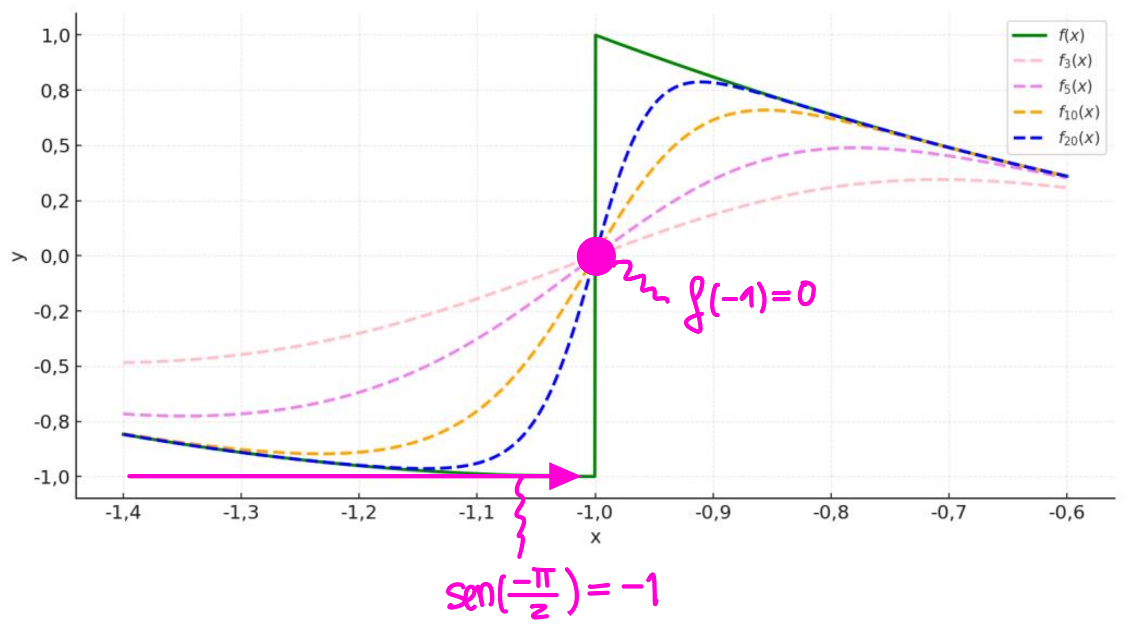
→ f_n CONT. en D y f DISCONT. en algún punto de D, entonces NO PUEDE HABER CONV. UNIF. en D.

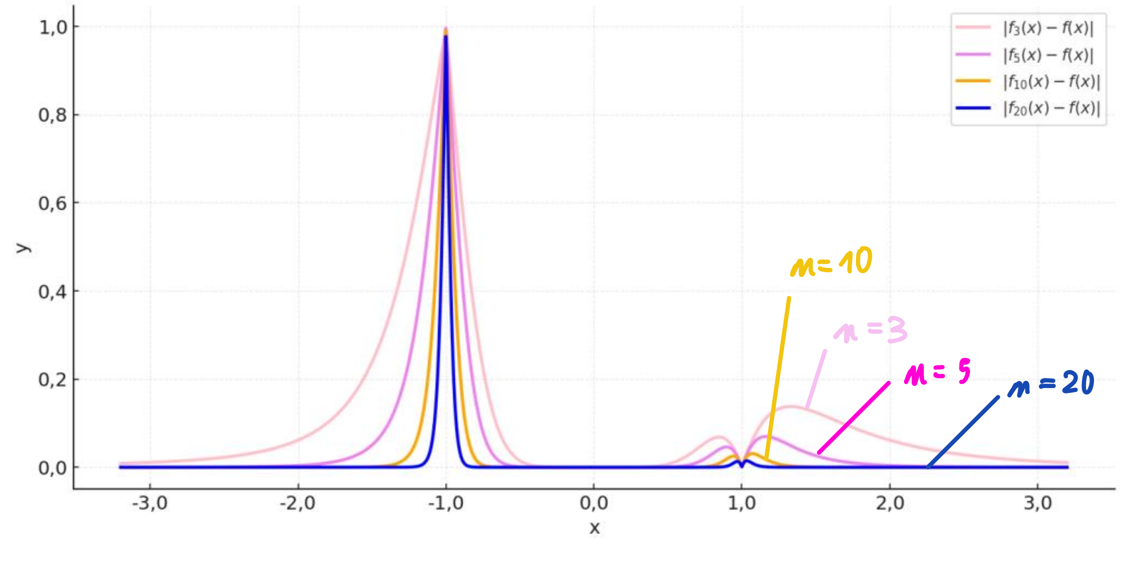
ASUMIENDO UN ERROR ε.

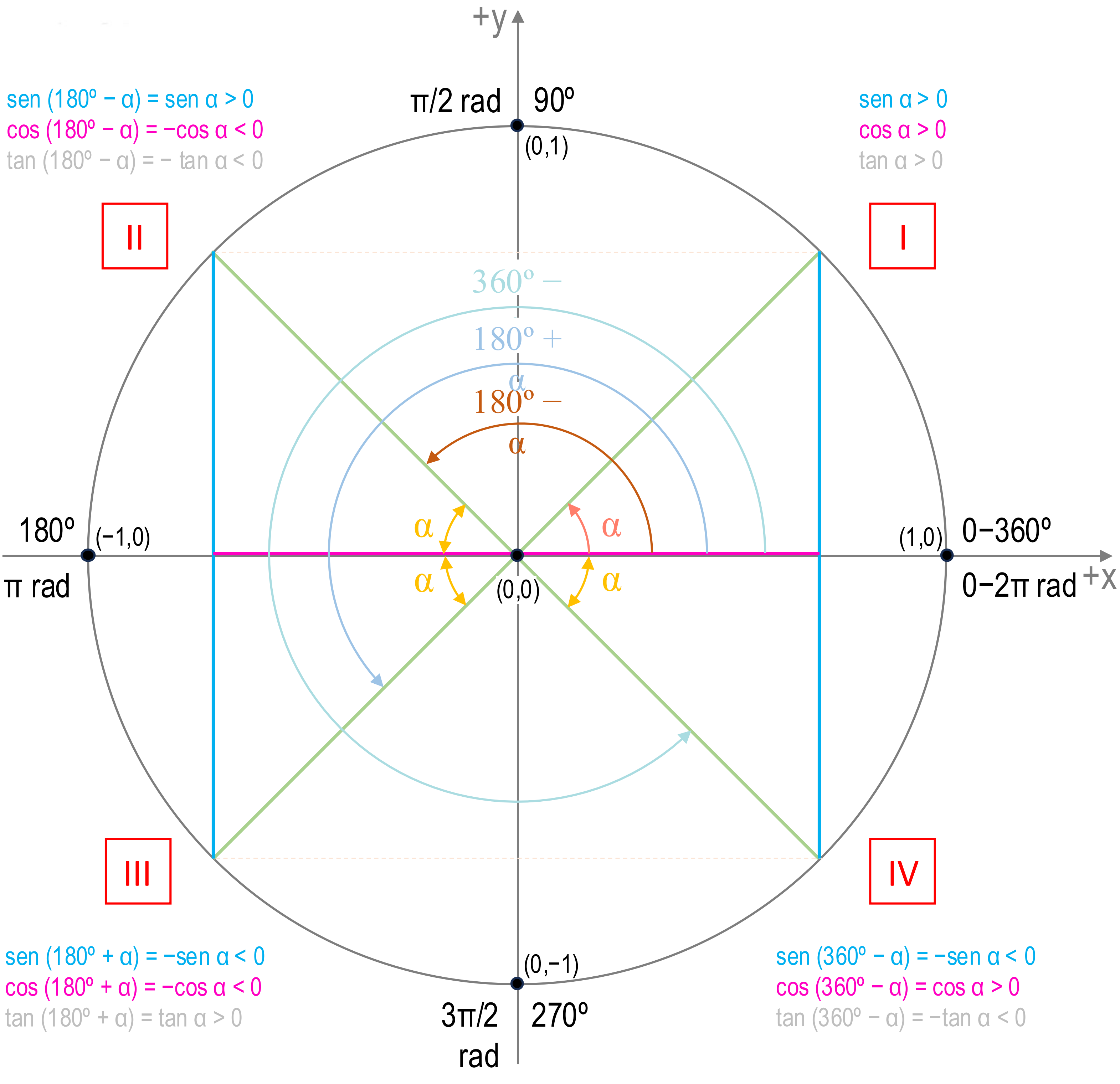
f CONV. UNIF. en $(-\infty, -1-\varepsilon) \cup (-1+\varepsilon, +\infty)$

f NO CONV. UNIF. en $\mathbb{R}$


f(x)
$f_3(x)$
$f_5(x)$
$f_{10}(x)$
$f_{20}(x)$
y
x


f(x)
$f_3(x)$
$f_5(x)$
$f_{10}(x)$
$f_{20}(x)$
y
x
$f(-1)=0$
$sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)=-1$


$|f_3(x)-f(x)|$
$|f_5(x)-f(x)|$
$|f_{10}(x)-f(x)|$
$|f_{20}(x)-f(x)|$
y
x
$n=10$
$n=3$
$n=5$
$n=20$


+y
π/2 rad
90º
(0,1)
sen (180º − α) = sen α > 0
cos (180º − α) = −cos α < 0
tan (180º − α) = − tan α < 0
sen α > 0
cos α > 0
tan α > 0
II
I
360º −
180º +
α
180º −
α
α
α
α
α
180º
(−1,0)
π rad
(0,0)
(1,0)
0−360º
0−2π rad
+x
III
IV
sen (180º + α) = −sen α < 0
cos (180º + α) = −cos α < 0
tan (180º + α) = tan α > 0
(0,−1)
3π/2
rad
270º
sen (360º − α) = −sen α < 0
cos (360º − α) = cos α > 0
tan (360º − α) = −tan α < 0

TRIGONOMETRÍA

Relaciones básicas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\tan x}$$

Ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Ángulo mitad

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \qquad \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Suma y resta de ángulos

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Suma y resta de una función trigonométrica

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2} \qquad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b}{2} \qquad \cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen} \frac{a + b}{2} \operatorname{sen} \frac{a - b}{2}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN CUADRANTE

	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

Bibliografía

UNE (2013) *ISO 80000 Magnitudes y unidades. Parte 2: Signos matemáticos y símbolos matemáticos que se utilizan en las ciencias naturales y en la tecnología.* AENOR, Madrid