info@tuacademiafacil.com

Aplicaciones lineales y espacios vectoriales.

¿Qué es un espacio vectorial? $V \to$ vectores , $K \to$ escalares (cuerpo)

1. Suma de vectores: $u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$ $+$
2. Producto por un escalar: $\alpha \in K \quad v \in V \Rightarrow a.v \in V$ $\cdot$

$(V, K, +, \cdot)$ tienen que cumplir: $\forall u,v,w \in V$ $\forall \alpha, \beta \in K$

Axiomas de la suma de vectores (grupo abeliano)
- Propiedad interna: $u \in V$, $v \in V \Rightarrow u+v \in V$
- Propiedad asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$
- Elemento neutro: $\exists 0 \in V$ tal que $u+0=u$
- Elemento opuesto: $\forall u \in V \quad \exists -u \in V$ tal que $u+(-u)=0$
- Propiedad conmutativa: $u+v = v+u$

Axiomas del producto por un escalar
- Propiedad interna: $\alpha \in K \quad v \in V \Rightarrow \alpha.v \in V$
- Distributiva del producto escalar respecto a la suma de vectores: $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
- Distributiva del producto escalar respecto a la suma de escalares: $(\alpha+\beta).v = \alpha.v + \beta v$
- Propiedad asociativa: $\alpha.(\beta v) = (\alpha.\beta).v$
- Elemento neutro: $\exists 1 \in K$ tal que $1.v = v$

¿Qué es una aplicación lineal?

Dados dos vectores cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ del espacio V y un escalar cualquiera a, la aplicación $\phi : V \to W$ es lineal si:

1. **Respeta la suma**: La transformación de la suma es la suma de las transformaciones.

$$\phi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v})$$

2. **Respeta el producto por escalar**: La transformación del vector escalado es la transformación del vector, escalada.

$$\phi(a\mathbf{u}) = a\phi(\mathbf{u})$$

$\phi : V \longrightarrow W$

$u+v \longrightarrow \phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$

$a.u \longrightarrow \phi(a.u) = a\,\phi(u)$

$\phi(a.u+bv) = a\,\phi(u) + b\,\phi(v)$

Consideremos el espacio vectorial P_2, de los polinomios de grado menor o igual a 2. Una base estándar para este espacio es $B = \{1, x, x^2\}$.
Ahora, definamos una aplicación lineal $\phi : P_2 \to P_1$ que sea la **operación de derivar**.

$$\phi(p(x)) = p'(x)$$

$\phi : P_2 \longrightarrow P_1$

$p(x) \longrightarrow \phi(p(x)) = p'(x)$

1) $\phi(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p(x)' + q(x)' = \phi(p(x)) + \phi(q(x))$ ✓

2) $\phi(a p(x)) = (a.p(x))' = a.p'(x) = a.\phi(p(x))$

$\phi(1) = 0$

$\phi(x) = 1$

$\phi(x^2) = 2x$

$p(x) = 5x^2 + 3x + 2$

$\phi(5x^2+3x+2) = 5\phi(x^2) + 3\phi(x) + 2.\phi(1) = 5.2x + 3.1 + 2.0 = 10x+3$

Matriz asociada: $\phi(1) = 0$. En la base $\{1, x\} \Rightarrow 0.1 + 0.x$

$\phi(x) = 1$. En la base $\{1, x\} \Rightarrow 1.1 + 0.x$

$\phi(x^2) = 2x$. En la base $\{1, x\} \Rightarrow 0.1 + 2.x$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\phi(1)$ $\phi(x)$ $\phi(x^2)$

La Derivación (Ejemplo 52): El operador derivada, D, que toma una función de C^1 (funciones derivables con derivada continua) y nos devuelve su derivada en C^0 (funciones continuas) es una aplicación lineal.

Una Proyección

Consideremos la aplicación P que proyecta cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ sobre el eje X. Su fórmula es $P(x, y) = (x, 0)$.

$P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow (x,0)$ *

Aplic. lineal: $P((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = P(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_1+y_1, 0) = (x_1,0)+(y_1,0) = P(x_1,y_1) + P(x_2,y_2)$

* $P(a(x_1,y_1)) = (ax_1, 0) = aP(x_1, 0)$

La Integración (Ejemplo 50): La operación de integrar una función continua en un intervalo $[a, b]$ es una aplicación lineal que va del espacio de funciones $C^0([a, b])$ al espacio de los números reales $\mathbb{R}$.

$\int f+g \, dx = \int f dx + \int g dx$ $\quad \int af dx = a\int f(x) dx$

El Operador Nabla (Gradiente) (Ejemplo 54): El operador gradiente, ∇, toma un campo escalar (como un mapa de temperaturas) y lo transforma en un campo vectorial (un mapa de flechas que indican la dirección de máximo crecimiento de la temperatura). Esta es una aplicación lineal de $C^1(\mathbb{R}^n)$ a $(C^0(\mathbb{R}^n))^n$.

$\nabla : C^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (C^0(\mathbb{R}^n))^n$

$f(x) \longmapsto \nabla f(x) = f'(x)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ gradiente.

Aplicaciones lineales de R^n a R^n .

$\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Aplicación lineal= multiplicación por una matriz

- Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, podemos definir una aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ simplemente como $\phi(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$.
- Y lo que es más importante, al revés también funciona:

  toda aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ viene necesariamente representada por una matriz A de orden $m \times n$.

Ejemplo 55

Consideremos la aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\phi(u_1, u_2) = (u_1 + u_2, 2u_2, u_1 - 3u_2)$$

$e_1 = (1,0) \Rightarrow \phi(1,0) = (1,0,1)$

$e_2 = (0,1) \Rightarrow \phi(0,1) = (1,2,-3)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{3\times 2}$

$\phi(1,0)$ $\phi(0,1)$

$\phi(u) = A.u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+u_2 \\ 2u_2 \\ u_1-3u_2 \end{pmatrix}$

Las formas lineales

Una aplicación lineal

$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (es decir, el caso $m = 1$) se denomina **forma lineal**. Su matriz asociada será de tamaño $1 \times n$, es decir, una **matriz fila**

Ejemplo 57

La forma lineal

$\phi(u_1, u_2, u_3) = u_1 + 3u_2 - 4u_3$

$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u_1, u_2, u_3) \longmapsto u_1 + 3u_2 - 4u_3$

$e_1 = (1,0,0)$

$e_2 = (0,1,0)$

$e_3 = (0,0,1)$

$\phi(u) = B.u$ $\quad \phi(u) = b^T.u$

$\phi(e_1) = \phi(1,0,0) = 1$

$\phi(e_2) = \phi(0,1,0) = 3$

$\phi(e_3) = \phi(0,0,1) = -4$

$B = (1 \quad 3 \quad -4)$

$\phi(e_1)$ $\phi(e_2)$ $\phi(e_3)$

Conexión fundamental con el cálculo: el diferencial.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, su matriz jacobiana en un punto a, que denotamos $f'(a)$, determina una aplicación lineal. Esta aplicación lineal se llama el **diferencial de f en el punto** a, y se escribe como $df(a)$.

La relación es directa:

$$\underbrace{df(a)(\mathbf{u})}_{\text{es una forma lineal}} = f'(a)\mathbf{u} \rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).u = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).e_j^T.u = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).dx_j.$$

$f(x) = x^2$

el diferencial es la mejor aproximación lineal a la función cerca de un punto, y la matriz Jacobiana es su representación.

Ejemplo 58

La función

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ no es lineal. Sin embargo, su diferencial en un punto, por ejemplo $a = (2, 3, 5)$, sí es una forma lineal.

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1.x_2.x_3$

No es una aplicación

$\Downarrow$

Su diferencial en un punto. ejemplo $(2,3,5)$ sí es una forma lineal.

$f'(a) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2) \underset{x=a}{=} (15, 10, 6) = 15(1,0,0) + 10.(0,1,0) + 6.(0,0,1) = 15.e_1^T + 10.e_2^T + 6.e_3^T$

$df(a) = 15dx_1 + 10.dx_2 + 6dx_3$

$\Rightarrow$ Su matriz Jacobiana en ese punto es $f'(a) = (\quad)$ es la matriz de una forma lineal.

Aplicaciones multilineales.

$\psi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \to V_0$ se dice que es **multilineal** si al fijar todas sus variables menos una (la j-ésima), la función que resulta es una aplicación lineal en esa variable j-ésima.

Bilineal: Tiene 2 vectores de entrada: $\varnothing : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_0$
Trilineal: Tiene 3 vectores de entrada.
Multilineal: Si el espacio de llegada es $\mathbb{R}$ (la aplicación toma varios vectores y devuelve un número) $\psi : V_1 \times V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{R}$

Ejemplo 61

- **La Suma (Forma Lineal, NO Multilineal):** $f(x,y,z) = x+y+z$ es una forma lineal

No es Multilineal: Si fijamos $y = y_0$, $z = z_0$ $\quad g(x) = x + (y_0+z_0)$
$g(x_1+x_2) = x_1 + x_2 + (y_0+z_0)$
$g(x_1) = x_1 + (y_0+z_0) \quad g(x_2) = x_2 + (y_0+z_0)$ $\Big\}$ $g(x_1+x_2) \neq g(x_1)+g(x_2)$

- **La Multiplicación (Forma Multilineal):**

$\varnothing(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$ No es lineal en su conjunto
$\varnothing((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = \varnothing(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)$
$\varnothing(x_1,y_1,z_1) = x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 \qquad \varnothing(x_2,y_2,z_2) = x_2 \cdot y_2 \cdot z_2$

Aplicaciones simétricas:

Una aplicación multilineal es simétrica si al permutar dos de sus variables, el valor no se altera.

Ejemplo 62: El producto escalar

$\psi(u,v) = u^T \cdot v$ es forma $\underbrace{\text{bilineal}}$ $\underbrace{\text{simétrica}}$.
$\hookrightarrow u \cdot v = v \cdot u$
al fijar $v \Rightarrow$ es lineal en u (viceversa)

Aplicaciones antisimétricas:

Una aplicación es antisimétrica si al intercambiar dos de sus variables, el valor de la aplicación cambia de signo.

Ejemplo: El determinante

es una aplicación multilineal antisimétrica.

Ejemplo 64

$n = 2$: $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1$.

$u = (u_1, u_2)$
$v = (v_1, v_2)$

$\det(u,v) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = u_1V_2 - u_2V_1$

$e_1 = (1,0)$
$e_2 = (0,1)$
$\vec{u} = (3,5) = 3(1,0) + 5(0,1)$

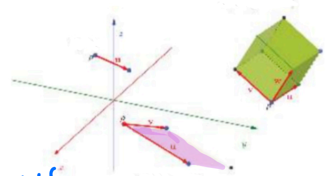
$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(u_1,u_2)\times(v_1,v_2) \longmapsto \det(u_1e_1 + u_2e_2 \,,\, v_1e_1 + v_2e_2)$
$= u_1 \cdot v_1 \underbrace{\det(e_1,e_1)}_{0} + u_1 \cdot v_2 \underbrace{\det(e_1,e_2)}_{1} + u_2 \cdot v_1 \cdot \underbrace{\det(e_2,e_1)}_{-1} + u_2 \cdot v_2 \underbrace{\det(e_2,e_2)}_{0}$
$= u_1V_2 - u_2 \cdot V_1$

$\det(e_1,e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
$\det(e_2,e_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Volumen k-dimensional en $\mathbb{R}^n$.

paralelepípedo k-dimensional, que llamaremos P_k, está determinado por k vectores, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, que parten de un mismo punto en el espacio $\mathbb{R}^n$.

- Si tenemos **1 vector** ($k = 1$), generamos un **segmento** (P_1). $P_1 = \{p + t\vec{u} : 0 \le t \le 1\}$
  2 vectores ($k = 2$), generamos un **paralelogramo** (P_2). $P_2 = \{p + t_1\vec{u} + t_2\vec{v} : 0 \le t_1, t_2 \le 1\}$
  3 vectores ($k = 3$), generamos un **paralelepípedo** (P_3).
  $P_3 = \{p + t_1\vec{u} + t_2\vec{v} + t_3\vec{w} \,;\, 0 \le t_1, t_2, t_3 \le 1\}$



Fórmula general para el volumen k dimensional

volumen k-dimensional del paralelepípedo P_k asociado a la matriz A (de tamaño $n \times k$) se define como:

$$|P_k| = \sqrt{\det(A^T A)}$$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Caso particular que ya conocías:

$n = k$
nº vectores = dimensión espacio

$|P_k| = \sqrt{\det(A^t \cdot A)} = \sqrt{\det(A^T) \cdot \det(A)} = \sqrt{(\det A)^2} = \det A$

Ejemplo 68 Volumen con vectores: $P_0=(1,3,-1)$ $P_1=(4,5,6)$ $P_2=(4,-1,0)$ $P_3=(1,1,1)$

$\vec{u}=P_1-P_0=(3,2,7)$ $n=K$
$\vec{v}=P_2-P_0=(3,-4,1)$ $(\mathbb{R}^3)$ 3vect
$\vec{w}=P_3-P_0=(0,-2,2)$

$$|P|=\left|\det\begin{vmatrix}3&2&7\\3&-4&1\\0&-2&2\end{vmatrix}\right|=|-24-42+6-12|=|-72|$$

Volumen $72\ u^3$

Ejemplo 69 Área triángulo T $P_0=(1,2,4)$ $P_1=(3,0,-1)$ $P_2=(6,1,4)$

$$|T|=\frac{1}{2}\sqrt{\det(A^T\cdot A)}$$

$\vec{u}=P_1-P_0=(2,-2,-5)$
$\vec{v}=P_2-P_0=(5,-1,0)$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}2&-2&-5\\5&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\-2&-1\\-5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33&12\\12&26\end{pmatrix}$$

$$\det(A^T\cdot A)=\begin{vmatrix}33&12\\12&26\end{vmatrix}=33\cdot26-12\cdot12=714$$

$$|T|=\frac{1}{2}\sqrt{714}$$

Tensores, k-formas, producto exterior, jacobiano.

- **Tensor**: Un **tensor de orden q** es una aplicación multilineal que toma q vectores y devuelve un número real. Es decir, es exactamente lo que antes llamamos una **forma multilineal**.

Ejemplo : Producto escalar. (Tensor de orden 2)

$T(v,w)=v\cdot w$

- Toma 2 vectores ✓
- Devuelve un nº $\mathbb{R}$ ✓

$\vec{u}=(2,3)$ $T(u,v)=(2,3)\cdot(4,1)$
$\vec{w}=(4,1)$ $=2\cdot4+3\cdot1=11$

$T(av_1+bv_2,w)=aT(v_1,w)+bT(v_2,w)$

- Linealidad (en el 1r arg).

$T(av_1+bv_2,w)=(av_1+bv_2)\cdot w=(av_1\cdot w)+(bv_2\cdot w)$
$aT(v_1,w)+bT(v_2,w)=a\cdot(v_1\cdot w)+b\cdot(v_2\cdot w)$

- Linealidad (en el 2ndo arg)

$T(v,aw_1+bw_2)=aT(v,w_1)+bT(v,w_2)$

Producto escalar $\Rightarrow$ 2-tensor.

- **k-Forma**: Una **k-forma** es, simplemente, un **tensor de orden k que además es antisimétrico**. $\Rightarrow$ el determinante es el ejemplo perfecto de una n-forma en $\mathbb{R}^n$

Para calcular el resultado de una forma básica $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ sobre un grupo de K vectores: $i_1, i_2, \ldots, i_n \ldots$ son nº entre 1 y n.

Regla fundamental:
- Crea una matriz: colocamos los K vectores como columnas para formar una matriz.
- Selecciona filas: la forma te indica que filas de esa matriz debes seleccionar.
- Calcula el determinante: de la pequeña sub-matriz que acabamos de formar.

$dx_1\wedge dx_3$ seleccionamos la fila 1 y la fila 3.

Ejemplo 74 $u_1=(1,2,3)$ $u_2=(2,-1,0)$ $u_3=(1,1,1)$

Cálculo de 1-forma dx_2, $\rightarrow$ seleccionamos la segunda componente del vector.

$u_1=(1,2,3)$ $dx_2(u_1)=2$

Cálculo de 2-forma $(dx_1\wedge dx_3)(u_1,u_2)$

1) $u=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\3&0\end{pmatrix}$

2) Fila 1: $(1,2)$
Fila 3: $(3,0)$

3) $\det\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}=1\cdot0-2\cdot3=-6$

Cálculo de 3-forma $(dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3)(u_1\,u_2\,u_3)=$

$$\det\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&1\\3&0&1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&1\\3&0&1\end{pmatrix}=-1+6+3-4=4$$

Producto exterior:

La operación «∧», denominada producto cuña o exterior se extiende a todas las k-formas de manera que sea bilineal y antisimétrica en sus argumentos y que el producto de una 1-forma por una k-forma sea una (k+1)-forma.

1) Bileneal

2) Antisemetrica $dx_3 \wedge dx_1 = -dx_1 \wedge dx_3$

3) Aumenta el orden. $(1\text{-forma}) \wedge (2\text{-forma}) = (3\text{-forma})$

Ejemplo 76

$\omega = 2dx_1 \wedge dx_3 + 4dx_2 \wedge dx_3$ 2-forma.

$\psi = 3dx_1 + 5dx_2$ 1-forma.

$\psi \wedge \omega = (3dx_1 + 5dx_2) \wedge (2dx_1 \wedge dx_3 + 4dx_2 \wedge dx_3)$

$= \underbrace{6dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3}_{=0} + 12dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \underbrace{10dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3}_{-10dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3} + \underbrace{20dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3}_{=0}$

$= 2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Volumen y Jacobiano:

$dx\,dy\,dz$

- **La Forma Volumen**: En $\mathbb{R}^n$, la n-forma $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ se llama la **forma volumen**.
- **El Jacobiano**: El determinante de la matriz jacobiana de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que denotamos $J_f = \det(f')$, nos dice cómo esa función f cambia los volúmenes.

La **fórmula de cambio de variable** (34) del libro nos da la conexión final:

determinante Jacobiano.

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \det(f')ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_n$$

Ejemplo 77 $r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(s_1, s_2) \longmapsto (s_2^3, s_2 + s_1^3)$

$J_r(s_1,s_2) = \left| \det \begin{vmatrix} 0 & 3s_1^2 \\ 3s_2^2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-9s_1^2 s_2^2| = 9s_1^2 \cdot s_2^2$

ejemplo 78 : $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$dx\,dy\,dz = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right| du\,dv\,dw$

$= |6-8|\,du\,dv\,dw = 2\,du\,dv\,dw$

Extensión de tensores.

extensión de tensores consiste en tomar la fórmula algebraica de un tensor definido en un espacio (como el determinante en $\mathbb{R}^n$) y aplicarla a vectores cuyos componentes no son simples números, sino que pueden ser otros vectores, funciones o incluso operadores diferenciales.

a) El Producto Vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores en $\mathbb{R}^3$, que es fundamental en física e ingeniería, es en realidad el **determinante de orden 3 extendido**. Se calcula usando una matriz formal donde la primera fila no son números, sino los vectores de la base canónica.

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su producto vectorial es:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$u_1 = (1, -1, 2)$

$u_2 = (2, 0, 1)$

$u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -1e_1 + 3e_2 + 2e_3 = (-1, 3, 2)$

b) El Rotacional de un Campo Vectorial (Ejemplo 81)

Consideremos el operador nabla, ∇, como un vector formal de operadores:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Si ahora aplicamos la misma "receta" del producto vectorial (es decir, el determinante extendido) entre el operador

∇ y un campo vectorial $F = (F_1, F_2, F_3)$, obtenemos el **rotacional** de F.

Este cálculo formal se escribe como el siguiente determinante:

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 81 $f(x,y,z)=(y,z,xyz)$

$$\nabla\times f = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & xyz \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e_1 & \partial/\partial x & y \\ e_2 & \partial/\partial y & z \\ e_3 & \partial/\partial z & xyz \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}xyz - \frac{\partial}{\partial z}z\right)e_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}xyz - \frac{\partial}{\partial z}y\right)e_2$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}z - \frac{\partial}{\partial y}y\right)e_3 = (xz-1)e_1 - yze_2 + 1e_3 =$$
$$= (xz-1,\ -yz,\ -1)$$

Ejemplo 82

$f(x,y,z)=(x^2y,\ xz,\ xyz)$

$$(\nabla\cdot f)(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^2y,xz,xyz) = \frac{\partial}{\partial x}x^2y + \frac{\partial}{\partial y}xz + \frac{\partial}{\partial z}xyz$$
$$= 2xy + 0 + xy = 3xy$$

El caso bidimensional.

1-formas básicas:
$dx_1, dx_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicac. lineal
$(dx_1)(u) = e_1^T\cdot u = u_1$
$(dx_2)(u) = e_2^T\cdot u = u_2$

$\vec{u}(3,-1)$
$(dx_1)(u) = (1,0)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = 3 = u_1$
$(dx_2)(u) = (0,1)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = -1 = u_2$

- **1-formas en** $\mathbb{R}^2$: Son las aplicaciones lineales que toman un vector de $\mathbb{R}^2$ y devuelven un número. Se construyen como combinaciones lineales de las formas básicas dx_1 y dx_2.

$$\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2$$

- **2-formas en** $\mathbb{R}^2$: Es la forma de mayor orden posible en el plano. Todas las 2-formas son simplemente un múltiplo de la **forma área** básica, $dx_1\wedge dx_2$.

$$\phi = a(dx_1\wedge dx_2)$$

$dA : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
aplicación bilineal

$dA(u,v) = dx_1\wedge dx_2\,(u,v) = \det(u,v)$

$dx_1dx_2 = |dx_1\wedge dx_2|$ área paralelos.

El caso tridimensional.

En $\mathbb{R}^3$

- Cada **1-forma** se puede asociar con un **campo vectorial**.
- Cada **2-forma** también se puede asociar con un **campo vectorial**.

El libro define el **producto vectorial** $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ como el resultado de aplicar un tensor antisimétrico fundamental, dS, a los dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} := dS(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

Donde este tensor es una combinación de las 2-formas básicas:

$$dS = (dx_2\wedge dx_3)\mathbf{e}_1 + (dx_3\wedge dx_1)\mathbf{e}_2 + (dx_1\wedge dx_2)\mathbf{e}_3$$

3. Propiedades Clave del Producto Vectorial

- **Dirección**: El vector resultante $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es siempre **perpendicular** tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Su sentido viene dado por la famosa

  regla de la mano derecha.
- **Módulo (Magnitud)**: El módulo del producto vectorial, $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$, es exactamente el **área del paralelogramo** formado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
- **Volumen (Producto Mixto)**: La 3-forma básica, $dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$, corresponde al determinante. Aplicarla a tres vectores nos da el producto mixto, que calcula el volumen del paralelepípedo que forman.

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \det[\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$$

- $\|\bar{u}\times\bar{v}\| = \|u\|\cdot\|v\|\cdot|\operatorname{sen}(u,v)|$

$\vec{w} = \bar{u}\times\bar{v}$
$\vec{w}\perp\vec{u}$ $\quad$ $\vec{u}\perp(\bar{u}\times\bar{v})$
$\vec{w}\perp\vec{v}$ $\quad$ $\vec{v}\perp(\bar{u}\times\bar{v})$

- $u\times(v\times w) = (u\cdot w)v - (u\cdot v)\cdot w$?

Ejemplo 83

$$e_2\times e_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 1\end{vmatrix} = e_1$$

$j\times k = i$

$$e_3\times e_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = e_2$$

$k\times i = j$

$$e_1\times e_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = e_3$$

$i\times j = k$

Ejemplo 84

Si $f(x,y,z) = (x^2y, xy^2z, xz)$ $\nabla \times f = ?$

$$\nabla \times f = \det(\mathcal{E}^t \nabla f) = \det \begin{pmatrix} e_1 & \partial/\partial x & x^2y \\ e_2 & \partial/\partial y & xy^2z \\ e_3 & \partial/\partial z & xz \end{pmatrix} = e_1\Big(\overbrace{\frac{\partial}{\partial y}xz}^{0} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial z}xy^2z}^{xy^2}\Big) - e_2\Big(\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}xz}^{z} - \overbrace{\frac{\partial}{\partial z}x^2y}^{0}\Big) +$$

$$+ e_3\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}xy^2z}_{y^2z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}x^2y}_{x^2}\Big) =$$

$$= -xy^2e_1 - ze_2 + (y^2z - x^2)e_3$$

$$= (-xy^2, -z, y^2z - x^2)$$

Vectores y k- formas en el espacio tridimensional.

Toda 1-forma ω en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como:

$$\omega = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3\,dx_3$$

El libro nos dice que esta 1-forma se puede asociar directamente con el vector:

$$a = (a_1, a_2, a_3) \qquad w(u) = a.u$$

Ejemplo Imaginemos la 1-forma $\omega = 2\,dx_1 - 3\,dx_2 + 5\,dx_3$. El vector asociado es $a = (2, -3, 5)$.

$\vec{u} = (1,1,1)$

$\omega(u) = (2,-3,5).(1,1,1)$
$= 2.1 - 3.1 + 5.1 = 4$

Toda 2-forma ϕ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como:

$$\phi = a_1\,dx_2 \wedge dx_3 + a_2\,dx_3 \wedge dx_1 + a_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

Ejemplo $\phi = 5\,dx_2 \wedge dx_3$ Vector asociado $(5,0,0)$

Calcular la acción sobre $\vec{u}(0,1,0)$ $\vec{v}(0,0,1)$

$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$5dx_2 \wedge dx_3 = 5.\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5.1 = 5.$

$\det(a,u,v) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

En $\mathbb{R}^3$, solo hay una forma básica de orden 3: $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Por lo tanto, cualquier 3-forma es un múltiplo de ella:

$$\psi = a\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$\psi = a.\det(u,v,w)$$

Ejemplo $\psi = 7dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. $a = 7$

Aplicar a los vectores de la base canónica

$e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ $e_3 = (0,0,1)$

$\psi(e_1,e_2,e_3) = 7.\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 7$

$a.\det(e_1,e_2,e_3) = 7.1 = 7$

CURVAS Y SUPERFICIES

Modelos poligonales

- Curvas -líneas poligonales
- Superficies- polígonos
- Dimensiones superiores- poliedros

¿Cuando dos objetos tienen la misma forma?

Definición informal: Dos objetos tienen la misma forma si podemos obtener uno a partir del otro "doblando, estirando, encogiendo" como si fuera plastilina. Está prohibido: romper, cortar o pegar.

Definición formal:

$C, D \subset \mathbb{R}^n$ tienen la misma forma si $\gamma(C) = D$

$\gamma: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aplicación de clase uno $(\mathcal{C}^1)$ con inversa de clase uno

Ejemplos:

Misma forma: un segmento de recta y un arco de parábola; un círculo y una elipse; un elipsoide macizo (balón de rugby) y una esfera; taza de café y un toroide.

Diferente forma: un intervalo abierto y uno cerrado; un cubo y una esfera.

Curvas

La curva elemental y su parametrización

curva elemental es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ que tiene la misma forma que un intervalo abierto. Piensa en ella como un único trazo continuo y suave, sin rupturas ni esquinas.

- Para describir matemáticamente este trazo, usamos una **parametrización**. Una parametrización es una función

  $\mathbf{r}(t)$ que "dibuja" la curva a medida que el parámetro t (que podemos imaginar como el tiempo) avanza por un intervalo.
  $\mathbf{r}'(t)$, nunca sea el vector cero.

C curva elemental se puede parametrizar, $\exists\, r: \mathbb{R} \to C$ aplicación biyectiva, con dominio abierto, denominada parametrización tal que $r'(t) \neq 0$ $\forall t \in \text{dom}\, r$

El vector tangente

La derivada de la parametrización,

$\mathbf{r}'(t_0)$, es un **vector tangente** a la curva en el punto $\mathbf{p} = \mathbf{r}(t_0)$.

Este vector nos da la dirección de la curva en ese punto. Todos los múltiplos de este vector forman el **espacio tangente** (T_pC), que es la recta tangente a la curva en el punto $\mathbf{p}$.

Ejemplo 89 $C \subset \mathbb{R}^2$

① $r_0(t) = (4\cos t, 6\,\text{sen}\, t)$ $\quad 0 < t < \pi$

② $r_1(t) = (4\cos t^2, 6\,\text{sen}\, t^2)$ $\quad 0 < t < \sqrt{\pi}$

$r_0'(t) = (-4\,\text{sen}\, t, 6\cos t)_{t=t_0} = (-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

si $t_0 = \frac{\pi}{4}$

$r_1'(t) = (-8t\,\text{sen}\, t^2, 12t\cos t^2)_{t=t_1} =$

$t_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ $\quad = (-2\sqrt{2\pi}, 3\sqrt{2\pi})$

$= \sqrt{\pi}\cdot(-2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

Curvas generales. Bordes y orientación.

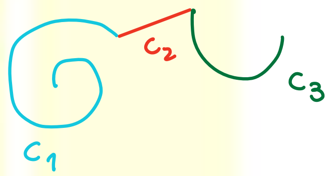
Una **curva elemental** es el camino suave y continuo dibujado por una única función de parametrización, $r(t)$, en un intervalo cerrado $[a, b]$. Se caracteriza por no tener auto-intersecciones y por ser un solo "trozo" ininterrumpido.

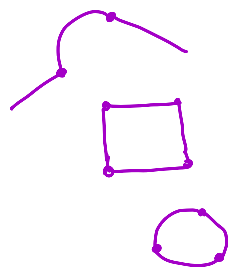
Una **curva cerrada** es aquella que no tiene borde, es decir, su borde es el conjunto vacío. El ejemplo por excelencia es el círculo, que se forma uniendo dos semicírculos (dos curvas elementales) por sus extremos.

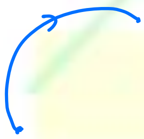
El **borde** de una curva, denotado como ∂C, está formado por sus puntos inicial y final que no están unidos a otra curva.

La **orientación** de una curva es simplemente el sentido en el que decidimos recorrerla. Cada curva tiene dos orientaciones posibles, que llamamos "positiva" y "negativa".

<u>curva general</u>: se forma uniendo un nº finito de curvas elementales, de forma que el final de una coincida con el principio de la siguiente.







ejemplo 91

$C = \{(t^2, t, t^2) \in \mathbb{R}^3 : 5 < t < 8\}$ curva elemental acotada.

$\partial C = \{a, b\}$ son dos puntos $\quad a = (25, 5, 25) \quad b = (64, 8, 64)$.

$r(t) = (t^2, t, t^2)$ $\quad 5 < t < 8 \Rightarrow$ la orientación va de a a b.

$F(t) = r((5+8) - t)$ $\quad 5 < t < 8 \Rightarrow$ la orientación va de b a a.

Superficies

Superficie elemental es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ que tiene la misma forma que una región poligonal plana, como un triángulo o un rectángulo.

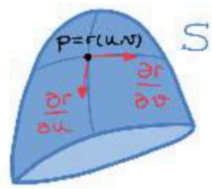
Parametrización es una función vectorial $r : U \to \mathbb{R}^n$, donde U es una región poligonal en el plano $\mathbb{R}^2$ (el espacio de los parámetros u y v). La función $r(u, v)$ es continua e inyectiva, y mapea los puntos del dominio plano U al conjunto de puntos que conforman la superficie en $\mathbb{R}^n$. Para que la superficie sea regular, se requiere que la matriz jacobiana de la parametrización, $r'(u, v)$, tenga **rango 2** en todo punto de U.

Ejemplo 95

Un triángulo en $\mathbb{R}^3$ con vértices A, B y C es un ejemplo perfecto de superficie elemental.

info@tuacademiafacil.com

Plano tangente y vector normal



Espacio tangente a una superficie S en un punto p, denotado como T_pS, es el plano que mejor aproxima linealmente la superficie en la vecindad de ese punto. Este plano está generado por los vectores tangentes a las líneas coordenadas, los cuales se obtienen de las derivadas parciales de la parametrización $r(u, v)$:

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} \quad \text{y} \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

Vector normal a una superficie en el espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$), denotado como N, es un vector perpendicular al plano tangente en un punto dado. Se calcula mediante el producto vectorial de los dos vectores tangentes generados por la parametrización:

$$N = r_u \times r_v$$

La orientación

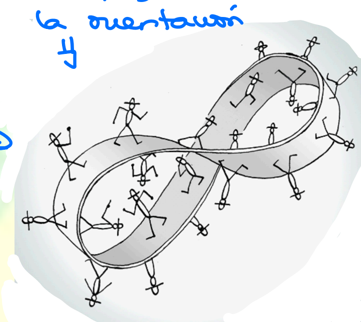
Una **superficie orientable** es aquella en la que se puede definir un campo de vectores normales que varía suavemente (sin cambios bruscos) en toda su extensión. Intuitivamente, esto significa que la superficie tiene dos caras distintas y separadas, como un "interior" y un "exterior". La elección de una de estas caras a través de la dirección de los vectores normales (por ejemplo, eligiendo que todos apunten "hacia afuera") se denomina **orientación** de la superficie.

Una **superficie no orientable** es aquella en la que es imposible definir un campo de vectores normales de manera suave y consistente en toda su extensión. El ejemplo más famoso es la **Banda de Möbius**, la cual posee una sola cara y un solo borde, haciendo imposible definir un "interior" y un "exterior" consistentes.

Ejemplo 104

misma orientación pegamos los lados opuestos

lo pegamos invirtiendo la orientación



Superficies generales

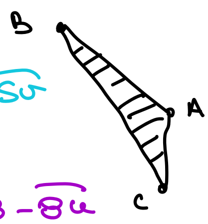
Un **cilindro** es una superficie general que se puede formar tomando una superficie elemental rectangular y pegando dos de sus lados opuestos.

La **superficie de una esfera o un toroide** (donut) son ejemplos de superficies generales que, además, son cerradas, lo que significa que no tienen borde.

Ejemplo 96

$A = (3,4,1)$
$B = (6,-7,8)$
$C = (5,8,1)$

$S = \{(3t_1+6t_2+5t_3,\ 4t_1-7t_2+8t_3,\ t_1+8t_2+t_3) \in \mathbb{R}^3 :$
$t_1, t_2, t_3 \geq 0,\ t_1+t_2+t_3 = 1\}$



$t_1 = u$
$t_2 = v$
$t_3 = 1 - t_1 - t_2 = 1-u-v$

$x = 3u+6v+5(1-u-v) = 3u+6v+5-5u-5v$
$= -2u+v+5$

$y = 4u-7v+8(1-u-v) = 4u-7v+8-8u$
$-8v =$
$= -4u-15v+8$

$z = u+8v+1-u-v = 7v+1$

$x = -2u+v+5$
$y = -4u-15v+8$
$z = 7v+1$

$\frac{\partial r}{\partial u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad r'(u,v) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -15 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ matriz rango 2

Ejemplo 98

definición de ortogonalidad: $\frac{\partial r}{\partial u}$ y $\frac{\partial r}{\partial v}$ son perpendiculares $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} = 0$

En el caso de la elipsoide

97) $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad , \; x_1, x_2, x_3 > 0 \}$

$r(u,v) = (a_1 \operatorname{sen} u \cos v, \; a_2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \; a_3 \cos u) \qquad u \in (0, \pi/2) \quad v \in (0, \pi/2)$

Cálculo de los vectores tangentes

$\frac{\partial r}{\partial u} = (a_1 \cos u \cos v, \; a_2 \cos u \operatorname{sen} v, \; -a_3 \operatorname{sen} u)$

$\frac{\partial r}{\partial v} = (-a_1 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \; a_2 \operatorname{sen} u \cos v, \; 0)$

Producto escalar

$\frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} = -a_1^2 \cos u \cdot \operatorname{sen} u \cdot \cos v \cdot \operatorname{sen} v + a_2^2 \cos u \cdot \operatorname{sen} u \cdot \cos v \cdot \operatorname{sen} v$

$= (a_2^2 - a_1^2) \cdot \cos u \operatorname{sen} u \cos v \operatorname{sen} v \neq 0$

Ejemplo 99

$z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow$ Calcular el vector normal $\quad 0 < z < 3 \quad y > 0$

1) Parametrizar el cono: $\quad z = u \qquad r(u,v) = (u \cos v, u \sin v, u)$

$\mathcal{U} = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < u < 3 \quad 0 < v < \pi \}$

2) Calculamos los vectores tangentes

$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 1)$

$\frac{\partial r}{\partial v} = (-u \sin v, \; u \cos v, \; 0)$

3) Calculamos el vector normal $\quad N = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-u \cos v, \; -u \sin v, \; u)$

$u \cos^2 v + u \sin^2 v$

$u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{1}$

4) Vector normal

$(u_0, v_0) = (2, \pi/2) \qquad N(2, \pi/2) = (-2 \cos \frac{\pi}{2}, \; -2 \sin \frac{\pi}{2}, \; 2)$

$= (0, -2, 2)$

Variedades

Variedad k-dimensional

Una **variedad k-dimensional** es la generalización de:

- **Curvas** (variedades de dimensión 1).
- **Superficies** (variedades de dimensión 2).
- **Cuerpos sólidos** (variedades de dimensión 3), etc.

Descripción paramétrica y implícita

Descripción paramétrica.

Describimos la variedad a través de una **parametrización**, que es una función $\mathbf{r}(u_1, \ldots, u_k)$ que toma k parámetros y nos devuelve un punto de la variedad.

- **Condición Clave**: La matriz jacobiana de $\mathbf{r}$ debe tener **rango** k. Esto asegura que los k parámetros generan un objeto de dimensión k y no algo de menor dimensión.

Descripción implícita

Describimos la variedad como el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en un espacio grande (como $\mathbb{R}^n$) que satisfacen un sistema de ecuaciones $f(\mathbf{x}) = 0$.

- **Condición Clave**: Si la variedad tiene dimensión k y está en $\mathbb{R}^n$, necesitamos $n-k$ ecuaciones. La matriz jacobiana de la función f debe tener **rango** $n-k$.

esfera estamos en $\mathbb{R}^3$
↳ variedad de dimensión 2. $\Big\}$ $3-2 = 1$ ecuación $\quad x^2+y^2+z^2 = 4$

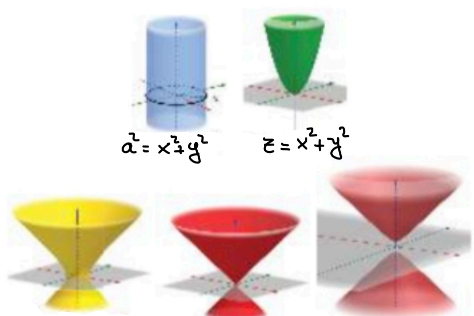
Borde de una variedad

El **borde** de una variedad de dimensión k es, a su vez, una variedad de dimensión $k-1$ (o es el conjunto vacío).

- **Ejemplo del Libro (Ejemplo 110)**:
  - El borde de un **disco** (variedad 2D) es su **circunferencia** (variedad 1D).
  - El borde de una **bola maciza** (variedad 3D) es su superficie, la **esfera** (variedad 2D).
  - El borde de una **esfera** es vacío, porque es una superficie cerrada.

Diferentes variedades (en implícitas)

Cilindro — Paraboloide



$a^2 = x^2+y^2$ — $z = x^2+y^2$

$x^2+y^2-z^2=1$ hiperboloide — $z^2 = x^2+y^2$ cono — $x^2+y^2-z^2=-1$ hiperboloide de dos hojas

Ejemplo 105

variedad 3 dimensional de $\mathbb{R}^4$

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 9 \ ; \ x_2, x_4 > 0\}$$

$x_1 = 3\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \qquad \theta_1 \in (0, \pi)$

$x_2 = 3\,\mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 \qquad \theta_2 \in (0, \pi/2)$

$x_3 = 3\cos\theta_3\,\mathrm{sen}\,\theta_2 \qquad \theta_3 \in (0, \pi)$

$x_4 = 3\,\mathrm{sen}\,\theta_3\,\mathrm{sen}\,\theta_2$

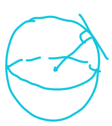
Implícita: espacio 4 dimensional $n=4$
1 ecuación
$K = n - (\text{nº ecuaciones}) = 4-1 = 3$
Variedad tridimensional

Paramétrica:

Ejemplo 107

esfera M en $\mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-9 = 0$ variedad definida implícitamente $f(x)=0$

el vector gradiente



$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \underbrace{(2x, 2y, 2z)}$$

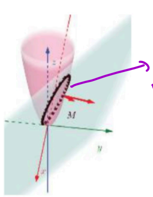
el vector gradiente es el doble del vector posición

$$\nabla f(x,y,z) = 2\underbrace{(x,y,z)}_{\text{vector posición}}$$

Ejemplo 109

M en $\mathbb{R}^3$ definido por 2 ecuaciones

1) $z - x^2 - y^2 = 0$ (paraboloide)
2) $-3x - 5y + 2z - 3 = 0$ (un plano)



curva elíptica.

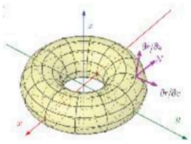
dimensión de la variedad: Estamos en $\mathbb{R}^3$ $(n=3)$ y tenemos 2 ecuaciones $\Rightarrow$ dimensión de variedad: $k = 3-2 = 1$ (curva)

Condición de rango
la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones debe tener rango 2.
(el nº de ecuaciones)

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (z - x^2 - y^2,\ -3x - 5y + 2z - 3)$$

matriz Jacobiana : $f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ Tiene rango 2 en todo punto del conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$

Ejemplo 111



$R_2 > R_1 > 0$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R_2)^2 + z^2 < R_1^2\}$

variedad 3-dimensional

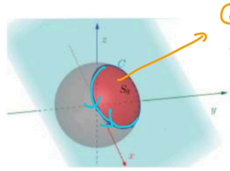
el borde

$\partial M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R_2)^2 + z^2 = R_1^2\}$

variedadad 2-dimensional

Recordad: el borde de una variedad de dimensión k es una variedad de dimensión $k-1$.

Ejemplo 112



Casquete esférico

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 30,\ x + y + z = 6\}$

$x = 2 + \sqrt{3}\,\text{sen}\,t + 3\cos t$

$y = 2 + \sqrt{3}\,\text{sen}\,t - 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$z = 2 - 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,t$

EJERCICIOS RESUELTOS

Consideremos la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\phi(x,y,z) = (x + 2y, z - x)$$

a) Demuestre que es una aplicación lineal.**b)** Halle la matriz A asociada a esta aplicación.

Demostración linealidad :

$u = (x_1, y_1, z_1)$

$v = (x_2, y_2, z_2) \qquad a \in \mathbb{R}$

1) $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$

$\phi(u+v) = \phi((x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) = \phi(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) =$

$= (x_1 + x_2 + 2(y_1+y_2),\ (z_1+z_2) - (x_1+x_2)) =$

$= (x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2,\ z_1 - x_1 + z_2 - x_2) = \underbrace{(x_1 + 2y_1,\ z_1 - x_1)}_{\phi(u)} + \underbrace{(x_2 + 2y_2,\ z_2 - x_2)}_{\phi(v)}$

2) $\underbrace{\phi(au)} = a\phi(u)$

$\phi(a(x_1,y_1,z_1)) = \phi(ax_1, ay_1, az_1) = (ax_1 + 2ay_1,\ az_1 - ax_1) =$

$= a\underbrace{(x_1 + 2y_1,\ z_1 - x_1)}_{\phi(u)} = a\phi(u)$

Matriz asociada .

$\phi(e_1) = \phi(1,0,0) = (1 + 2\cdot 0,\ 0 - 1) = (1,-1)$

$\phi(e_2) = \phi(0,1,0) = (0 + 2\cdot 1,\ 0 - 0) = (2,0)$

$\phi(e_3) = \phi(0,0,1) = (0 + 2\cdot 0,\ 1 - 0) = (0,1)$

Como:

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\Downarrow$

$M_{2\times 3}$

$\shortparallel$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\phi(e_1)} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\phi(e_2)} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\phi(e_3)} \end{pmatrix}$$

Sea la aplicación $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 + u_2 v_1$.

a) Demuestre que es una forma bilineal.

b) ¿Es simétrica?

a) Demostramos Bilinealidad.

1) Linealidad en u (fijamos v) $v = (v_1, v_2)$ vector fijo. $L_v(u) = u_1 v_2 + u_2 v_1 =$
$= \underline{v_2} u_1 + \underline{v_1} u_2 \to$ c. lineal de las comp $\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\Rightarrow$ es lineal

2) linealidad en v (fijamos u) $u = (u_1, u_2)$ v. fijo

$L_u(v) = u_1 v_2 + u_2 v_1 = \underline{u_2} v_1 + \underline{u_1} v_2 \to$ c. lineal de las componentes $\vec{v}(v_1, v_2) \Rightarrow$ es lineal

$\Rightarrow$ forma Bilineal.

b) Simetría Intercambiamos los papeles de u y v y vemos si la fórmula cambia.

$\psi(v, u) = v_1 u_2 + v_2 u_1 = u_1 v_2 + u_2 v_1 = \psi(u, v)$ $\Rightarrow$ Forma Bilineal y simétrica.

Calcule el área (volumen 2-dimensional) del triángulo en $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices son $P = (1, 0, 1)$, $Q = (0, 2, 1)$ y $R = (1, 1, 3)$.

$A_{paral}: \sqrt{\det(A^T A)}$

$A_{triang}: \frac{1}{2}\sqrt{\det(A^T A)}$

(1) Los vectores: $\vec{PQ} = Q - P = (0-1, 2-0, 1-1) = (-1, 2, 0)$
$\vec{PR} = R - P = (1-1, 1-0, 3-1) = (0, 1, 2)$

(2) Construimos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Calculamos $A^T \cdot A$

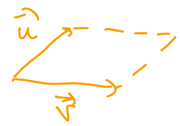
$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(4) det $A^T \cdot A$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21$$

(5) Área

$\frac{1}{2}\sqrt{21}$ //



$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$
↳ área del paralelogramo.

Sea la 2-forma en $\mathbb{R}^3$, $\phi = 5dx_1 \wedge dx_3$.

a) Identifique el vector $\mathbf{a}$ asociado a esta 2-forma.

b) Usando la idea de tensores extendidos, verifique que $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ para los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) tensor $dS = (dx_2 \wedge dx_3)e_1 + \underline{(dx_3 \wedge dx_1)}e_2 + (dx_1 \wedge dx_2)e_3$

nuestra 2-forma: $\underline{5dx_1 \wedge dx_3}$ $\qquad dx_1 \wedge dx_3 = -dx_3 \wedge dx_1$

componente e_1 (asociado $dx_2 \wedge dx_3$) $= 0$
Componente e_2 (asociado $dx_3 \wedge dx_1$) es -5
Componente e_3 (asociado $dx_1 \wedge dx_2$) es 0

} vector asociado $a = (0, -5, 0)$

b) verificamos $\phi(u, v) = a(u \times v)$

Camino 1: Cálculo directo de la 2-forma

$\phi(u, v) = (5dx_1 \wedge dx_3)(u, v) \to$ es 5 veces el determinante de la matriz formada por los componentes 1º y 3º de u y v.

$$\phi(u, v) = 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot (1 - 0) = 5 //$$

Camino 2: Usando el producto mixto.

$$u \times v = \det\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i(2-3) - j(1-0) + k(1-0) = (-1, -1, 1)$$

producto escalar con $a = (0, -5, 0) \Rightarrow a \cdot u \times v = (0, -5, 0)(-1, -1, 1) =$
$= 0(-1) + (-5)(-1) + 0 \cdot 1 = 5 //$

observ: $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 + 5 = 5 //$

Considere la superficie del cono parametrizada por $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$ con $u > 0$.

a) Halle una base para el espacio tangente en el punto P correspondiente a $(u,v) = (2, \pi/2)$.

b) Halle un vector normal a la superficie en ese mismo punto.

a) Plano tangente.

1) derivadas parciales ⇒ los dos vectores formarán la base del plano tangente

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$$

2) evaluamos en el punto $(u,v) = (2, \pi/2)$

$$\frac{\partial r}{\partial u}(2, \pi/2) = (\cos \pi/2, \sin \pi/2, 1) = (0, 1, 1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}(2, \pi/2) = (-2\operatorname{sen}\pi/2, 2\cdot\cos\pi/2, 0) = (-2, 0, 0)$$

Una base del espacio tangente en el punto $P = (0,2,2)$ ⇒

$\{(0,1,1), (-2,0,0)\}$

b) Vector normal

$$N = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0+2) + k(0+2) = (0, -2, 2)$$

Demuestre que el elipsoide definido por la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ es una variedad de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$. ⇒ 1 ecuación.

1) definir la función implícita. $f(x,y,z) = 0$

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1$$

Tenemos $n = 3$ $(\mathbb{R}^3)$ queremos ver si la dimensión ⇒ $k = 2$

⇒ el nº de ecuaciones: $n - k = 1$

$$\overset{\shortparallel}{3} - \overset{\shortparallel}{2} = 1 \Rightarrow \text{ecuación}$$

2) Calculamos la matriz Jacobiana.

$$f'(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{2x}{4}, \frac{2y}{9}, 2z\right) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 2z\right)$$

3) Verificamos el rango. ⇒ Para que elipsoide sea una variedad de dimensión 2, el rango de la matriz Jacobiana (1×3) debe ser $n - k = 1$ ⇒ en todos los puntos del elipsoide.

$$f'(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, 2z\right) = (0,0,0) \Rightarrow \text{Solo ocurre } x = y = z = 0$$

¿El punto $(0,0,0)$ es de nuestro elipsoide?

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \not\Rightarrow \frac{0^2}{4} + \frac{0^2}{9} + 0^2 \neq 1 \Rightarrow \text{el punto NO está en el elipsoide.}$$

El rango de la Jacobiana siempre es 1 en todos los puntos de la superficie ⇒ demostramos elipsoide es una variedad de dimensión 2.