



Aplicaciones lineales y espacios vectoriales.

¿Qué es un espacio vectorial?

1. Suma de vectores:
2. Producto por un escalar:

Axiomas de la suma de vectores (grupo abeliano)

- Propiedad interna:
- Propiedad asociativa:
- Elemento neutro:
- Elemento opuesto:
- Propiedad conmutativa:

Axiomas del producto por un escalar

- Propiedad interna:
- Distributiva del producto escalar respecto a la suma de vectores:
- Distributiva del producto escalar respecto a la suma de escalares:
- Propiedad asociativa:
- Elemento neutro:

¿Qué es una aplicación lineal?

Dados dos vectores cualesquiera \mathbf{u} y \mathbf{v} del espacio V y un escalar cualquiera a , la aplicación $\phi : V \rightarrow W$ es lineal si:

1. **Respeto la suma:** La transformación de la suma es la suma de las transformaciones.

$$\phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u}) + \phi(\mathbf{v})$$

2. **Respeto el producto por escalar:** La transformación del vector escalado es la transformación del vector, escalada.

$$\phi(a\mathbf{u}) = a\phi(\mathbf{u})$$

Consideremos el espacio vectorial P_2 , de los polinomios de grado menor o igual a 2. Una base estándar para este espacio es $B = \{1, x, x^2\}$.

Ahora, definamos una aplicación lineal $\phi : P_2 \rightarrow P_1$ que sea la **operación de derivar**.

$$\phi(p(x)) = p'(x)$$

La Derivación (Ejemplo 52): El operador derivada, D , que toma una función de C^1 (funciones derivables con derivada continua) y nos devuelve su derivada en C^0 (funciones continuas) es una aplicación lineal.

La Integración (Ejemplo 50): La operación de integrar una función continua en un intervalo $[a, b]$ es una aplicación lineal que va del espacio de funciones $C^0([a, b])$ al espacio de los números reales \mathbb{R} .

El Operador Nabla (Gradiente) (Ejemplo 54): El operador gradiente, ∇ , toma un campo escalar (como un mapa de temperaturas) y lo transforma en un campo vectorial (un mapa de flechas que indican la dirección de máximo crecimiento de la temperatura). Esta es una aplicación lineal de

$C^1(\mathbb{R}^n)$ a $(C^0(\mathbb{R}^n))^n$.

Ejemplo Adicional 2: Una Proyección

Consideremos la aplicación P que proyecta cualquier vector de \mathbb{R}^2 sobre el eje X. Su fórmula es $P(x, y) = (x, 0)$.





Aplicaciones lineales de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m .

Aplicación lineal= multiplicación por una matriz

- Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, podemos definir una aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ simplemente como $\phi(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$.
- Y lo que es más importante, al revés también funciona:
toda aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ viene necesariamente representada por una matriz A de orden $m \times n$.

Ejemplo 55

Consideremos la aplicación lineal $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\phi(u_1, u_2) = (u_1 + u_2, 2u_2, u_1 - 3u_2)$$

Las formas lineales

Una aplicación lineal

$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (es decir, el caso $m = 1$) se denomina **forma lineal**. Su matriz asociada será de tamaño $1 \times n$, es decir, una **matriz fila**

Ejemplo 57

La forma lineal

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = u_1 + 3u_2 - 4u_3$$

Conexión fundamental con el cálculo: el diferencial.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, su matriz jacobiana en un punto a , que denotamos $f'(a)$, determina una aplicación lineal. Esta aplicación lineal se llama el **diferencial de f en el punto a** , y se escribe como $df(a)$.

La relación es directa:

$$df(a)(\mathbf{u}) = f'(a)\mathbf{u}$$

Ejemplo 58

La función

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ no es lineal. Sin embargo, su diferencial en un punto, por ejemplo

$a = (2, 3, 5)$, sí es una forma lineal. Su matriz jacobiana en ese punto es





Aplicaciones multilineales.

$\psi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_m \rightarrow V_0$ se dice que es **multilineal** si al fijar todas sus variables menos una (la j -ésima), la función que resulta es una aplicación lineal en esa variable j -ésima.

Bilineal:

Trilineal:

Multilineal:

Ejemplo 61

- La Suma (Forma Lineal, NO Multilineal):
- La Multiplicación (Forma Multilineal):

Aplicaciones simétricas:

Ejemplo 62: El producto escalar

Aplicaciones antisimétricas:

Ejemplo: El determinante

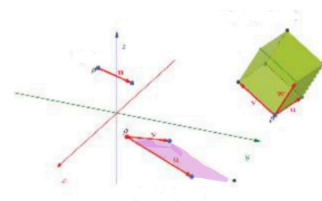
Ejemplo 64

$$n = 2: \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Volumen k-dimensional en \mathbb{R}^n .

paralelepípedo k -dimensional, que llamaremos P_k , está determinado por k vectores, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$, que parten de un mismo punto en el espacio \mathbb{R}^n .

- Si tenemos **1 vector** ($k = 1$), generamos un **segmento** (P_1).
- 2 vectores** ($k = 2$), generamos un **paralelogramo** (P_2).
- 3 vectores** ($k = 3$), generamos un **paralelepípedo** (P_3).



Fórmula general para el volumen k dimensional

volumen k -dimensional del paralelepípedo P_k asociado a la matriz A (de tamaño $n \times k$) se define como:

$$|P_k| = \sqrt{\det(A^T A)}$$

Caso particular que ya conocías:





Ejemplo 68

Ejemplo 69

Tensores, k-formas, producto exterior, jacobiano.

- **Tensor:** Un **tensor de orden q** es una aplicación multilinear que toma q vectores y devuelve un número real. Es decir, es exactamente lo que antes llamamos una **forma multilinear**.

Ejemplo

- **k-Forma:** Una **k-forma** es, simplemente, un **tensor de orden k que además es antisimétrico**.

Para calcular el resultado de una forma básica $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ sobre un grupo de k vectores:

Regla fundamental:

- Crea una matriz:
- Selecciona filas:
- Calcula el determinante:

Ejemplo 74

Cálculo de 1-forma

Cálculo de 2-forma

Cálculo de 3-forma





Producto exterior:

La operación « \wedge », denominada producto cuña o exterior se extiende a todas las k-formas de manera que sea bilineal y antisimétrica en sus argumentos y que el producto de una 1-forma por una k-forma sea una (k+1)-forma.

Ejemplo 76

Volumen y Jacobiano:

- **La Forma Volumen:** En \mathbb{R}^n , la n-forma $\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ se llama la **forma volumen**.
- **El Jacobiano:** El determinante de la matriz jacobiana de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que denotamos $J_f = \det(f')$, nos dice cómo esa función f cambia los volúmenes.

La **fórmula de cambio de variable** (34) del libro nos da la conexión final:

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \det(f') ds_1 \wedge \dots \wedge ds_n$$

Ejemplo 77

Extensión de tensores.

extensión de tensores consiste en tomar la fórmula algebraica de un tensor definido en un espacio (como el determinante en \mathbb{R}^3) y aplicarla a vectores cuyos componentes no son simples números, sino que pueden ser otros vectores, funciones o incluso operadores diferenciales.

a) El Producto Vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores en \mathbb{R}^3 , que es fundamental en física e ingeniería, es en realidad el **determinante de orden 3 extendido**. Se calcula usando una matriz formal donde la primera fila no son números, sino los vectores de la base canónica.

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su producto vectorial es:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

b) El Rotacional de un Campo Vectorial (Ejemplo 81)

Consideremos el operador nabla, ∇ , como un vector formal de operadores:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Este cálculo formal se escribe como el siguiente determinante:

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

Si ahora aplicamos la misma "receta" del producto vectorial (es decir, el determinante extendido) entre el operador

∇ y un campo vectorial $F = (F_1, F_2, F_3)$, obtenemos el **rotacional** de F.





Ejemplo 81

Ejemplo 82

El caso bidimensional.

- **1-formas en \mathbb{R}^2 :** Son las aplicaciones lineales que toman un vector de \mathbb{R}^2 y devuelven un número. Se construyen como combinaciones lineales de las formas básicas dx_1 y dx_2 .

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$$

- **2-formas en \mathbb{R}^2 :** Es la forma de mayor orden posible en el plano. Todas las 2-formas son simplemente un múltiplo de la **forma área** básica, $dx_1 \wedge dx_2$.

$$\phi = a(dx_1 \wedge dx_2)$$

El caso tridimensional.

En \mathbb{R}^3

- Cada **1-forma** se puede asociar con un **campo vectorial**.
- Cada **2-forma** también se puede asociar con un **campo vectorial**.

El libro define el **producto vectorial** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como el resultado de aplicar un tensor antisimétrico fundamental, dS , a los dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := dS(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Donde este tensor es una combinación de las 2-formas básicas:

$$dS = (dx_2 \wedge dx_3)\mathbf{e}_1 + (dx_3 \wedge dx_1)\mathbf{e}_2 + (dx_1 \wedge dx_2)\mathbf{e}_3$$

3. Propiedades Clave del Producto Vectorial

- **Dirección:** El vector resultante $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es siempre **perpendicular** tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} . Su sentido viene dado por la famosa **regla de la mano derecha**.
- **Módulo (Magnitud):** El módulo del producto vectorial, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, es exactamente el **área del paralelogramo** formado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .
- **Volumen (Producto Mixto):** La 3-forma básica, $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, corresponde al determinante. Aplicarla a tres vectores nos da el producto mixto, que calcula el volumen del paralelepípedo que forman.

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det[\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}]$$

Ejemplo 83





Ejemplo 84

Vectores y k- formas en el espacio tridimensional.

Proposición: Toda 1-forma ω en \mathbb{R}^3 se puede escribir como:

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$

El libro nos dice que esta 1-forma se puede asociar directamente con el vector:

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

Ejemplo

Imaginemos la 1-forma $\omega = 2 dx_1 - 3 dx_2 + 5 dx_3$. El vector asociado es $a = (2, -3, 5)$.

Toda 2-forma ϕ en \mathbb{R}^3 se puede escribir como:

$$\phi = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2$$

Ejemplo

En \mathbb{R}^3 , solo hay una forma básica de orden 3: $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Por lo tanto, cualquier 3-forma es un múltiplo de ella:

$$\psi = a dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Ejemplo

CURVAS Y SUPERFICIES

Modelos poligonales

- Curvas -líneas poligonales
- Superficies- polígonos
- Dimensiones superiores- poliedros

¿Cuándo dos objetos tienen la misma forma?

Definición informal:

Definición formal:

Ejemplos:

Misma forma: un segmento de recta y un arco de parábola; un círculo y una elipse; un elipsoide macizo y una esfera; taza de café y un toroide.

Diferente forma: un intervalo abierto y uno cerrado; un cubo y una esfera.





Curvas

La curva elemental y su parametrización

curva elemental es un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n que tiene la misma forma que un intervalo abierto. Piensa en ella como un único trazo continuo y suave, sin rupturas ni esquinas.

- Para describir matemáticamente este trazo, usamos una **parametrización**. Una parametrización es una función

$\mathbf{r}(t)$ que "dibuja" la curva a medida que el parámetro t (que podemos imaginar como el tiempo) avanza por un intervalo.

$\mathbf{r}'(t)$, nunca sea el vector cero.

El vector tangente

La derivada de la parametrización,

$\mathbf{r}'(t_0)$, es un **vector tangente** a la curva en el punto $\mathbf{p} = \mathbf{r}(t_0)$.

Este vector nos da la dirección de la curva en ese punto. Todos los múltiplos de este vector forman el **espacio tangente** ($T_p C$), que es la recta tangente a la curva en el punto \mathbf{p} .

Ejemplo 89

Curvas generales. Bordes y orientación.

Una **curva elemental** es el camino suave y continuo dibujado por una única función de parametrización, $\mathbf{r}(t)$, en un intervalo cerrado $[a, b]$. Se caracteriza por no tener auto-intersecciones y por ser un solo "trozo" ininterrumpido.

Una **curva cerrada** es aquella que no tiene borde, es decir, su borde es el conjunto vacío. El ejemplo por excelencia es el círculo, que se forma uniendo dos semicírculos (dos curvas elementales) por sus extremos.

El **borde** de una curva, denotado como ∂C , está formado por sus puntos inicial y final que no están unidos a otra curva.

La **orientación** de una curva es simplemente el sentido en el que decidimos recorrerla. Cada curva tiene dos orientaciones posibles, que llamamos "positiva" y "negativa". Elegir una

Superficies

Superficie elemental es un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n que tiene la misma forma que una región poligonal plana, como un triángulo o un rectángulo.

Parametrización es una función vectorial $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde U es una región poligonal en el plano \mathbb{R}^2 (el espacio de los parámetros u y v). La función $\mathbf{r}(u, v)$ es continua e inyectiva, y mapea los puntos del dominio plano U al conjunto de puntos que conforman la superficie en \mathbb{R}^n .

Para que la superficie sea regular, se requiere que la matriz jacobiana de la parametrización, $\mathbf{r}'(u, v)$, tenga **rango 2** en todo punto de U .

Ejemplo 95

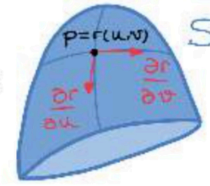




Plano tangente y vector normal

Espacio tangente a una superficie S en un punto p , denotado como $T_p S$, es el plano que mejor aproxima linealmente la superficie en la vecindad de ese punto. Este plano está generado por los vectores tangentes a las líneas coordenadas, los cuales se obtienen de las derivadas parciales de la parametrización $r(u, v)$:

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} \quad \text{y} \quad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$



Vector normal a una superficie en el espacio tridimensional (\mathbb{R}^3), denotado como N , es un vector perpendicular al plano tangente en un punto dado. Se calcula mediante el producto vectorial de los dos vectores tangentes generados por la parametrización:

$$N = r_u \times r_v$$

La orientación

Una **superficie orientable** es aquella en la que se puede definir un campo de vectores normales que varía suavemente (sin cambios bruscos) en toda su extensión. Intuitivamente, esto significa que la superficie tiene dos caras distintas y separadas, como un "interior" y un "exterior". La elección de una de estas caras a través de la dirección de los vectores normales (por ejemplo, eligiendo que todos apunten "hacia afuera") se denomina **orientación** de la superficie.

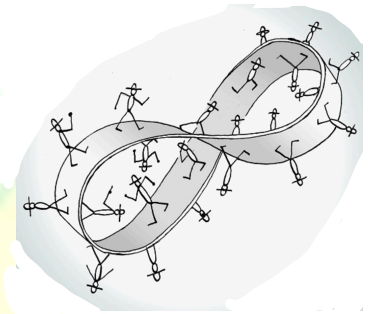
Una **superficie no orientable** es aquella en la que es imposible definir un campo de vectores normales de manera suave y consistente en toda su extensión. El ejemplo más famoso es la **Banda de Möbius**, la cual posee una sola cara y un solo borde, haciendo imposible definir un "interior" y un "exterior" consistentes.

Superficies generales

Un **cilindro** es una superficie general que se puede formar tomando una superficie elemental rectangular y pegando dos de sus lados opuestos.

La **superficie de una esfera o un toroide** (donut) son ejemplos de superficies generales que, además, son cerradas, lo que significa que no tienen borde.

Ejemplo 104



Ejemplo 96

Ejemplo 98





Ejemplo 99



Variedades

Variedad k -dimensional

Una **variedad k -dimensional** es la generalización de:

- **Curvas** (variedades de dimensión 1).
- **Superficies** (variedades de dimensión 2).
- **Cuerpos sólidos** (variedades de dimensión 3), etc.

Descripción paramétrica y implícita

Descripción paramétrica.

Describimos la variedad a través de una **parametrización**, que es una función $\mathbf{r}(u_1, \dots, u_k)$ que toma k parámetros y nos devuelve un punto de la variedad.

- **Condición Clave:** La matriz jacobiana de \mathbf{r} debe tener **rango k** . Esto asegura que los k parámetros generan un objeto de dimensión k y no algo de menor dimensión.





Descripción implícita

Describimos la variedad como el conjunto de puntos \mathbf{x} en un espacio grande (como \mathbb{R}^n) que satisfacen un sistema de ecuaciones $f(\mathbf{x}) = 0$.

- **Condición Clave:** Si la variedad tiene dimensión k y está en \mathbb{R}^n , necesitamos $n - k$ ecuaciones. La matriz jacobiana de la función f debe tener rango $n - k$.

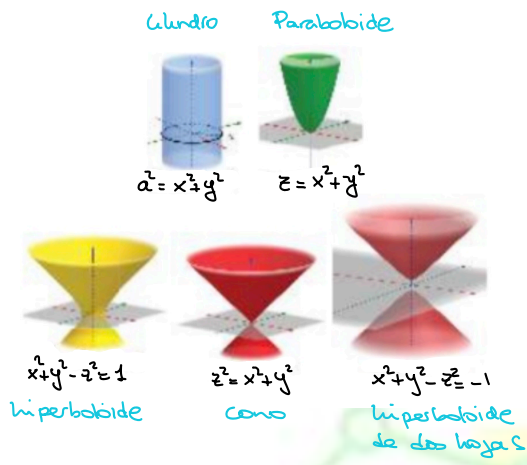
Borde de una variedad

El **borde** de una variedad de dimensión k es, a su vez, una variedad de dimensión $k - 1$ (o es el conjunto vacío).

- **Ejemplo del Libro (Ejemplo 110):**
 - El borde de un **disco** (variedad 2D) es su **circunferencia** (variedad 1D).
 - El borde de una **bola maciza** (variedad 3D) es su superficie, la **esfera** (variedad 2D).
 - El borde de una **esfera** es vacío, porque es una superficie cerrada.

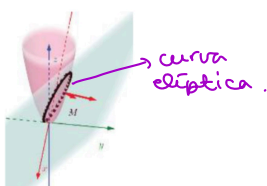
Diferentes variedades (en implícitas)

Ejemplo 105



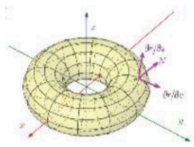
Ejemplo 107

Ejemplo 109

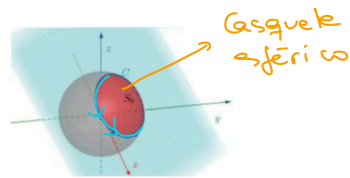




Ejemplo 111



Ejemplo 112



EJERCICIOS RESUELTOS

Consideremos la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\phi(x, y, z) = (x + 2y, z - x)$$

a) Demuestre que es una aplicación lineal. b) Halle la matriz A asociada a esta aplicación.





Sea la aplicación $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_2 + u_2v_1$.

- Demuestre que es una forma bilineal.
- ¿Es simétrica?

Calcule el área (volumen 2-dimensional) del triángulo en \mathbb{R}^3 cuyos vértices son $P = (1, 0, 1)$, $Q = (0, 2, 1)$ y $R = (1, 1, 3)$.

Sea la 2-forma en \mathbb{R}^3 , $\phi = 5dx_1 \wedge dx_3$.

- Identifique el vector \mathbf{a} asociado a esta 2-forma.
- Usando la idea de tensores extendidos, verifique que $\phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ para los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.





Considere la superficie del cono parametrizada por $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ con $u > 0$.

- Halle una base para el espacio tangente en el punto P correspondiente a $(u, v) = (2, \pi/2)$.
- Halle un vector normal a la superficie en ese mismo punto.

Demuestre que el elipsoide definido por la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ es una variedad de dimensión 2 en \mathbb{R}^3 .

