info@tuacademiafacil.com

SUCESOS

Llamamos determinista al experimento de resultado predecible y aleatorio al de resultado impredecible.

Llamaremos suceso aleatorio a cualquier resultado de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar un dado, “obtener un 3”, “obtener número par”, “obtener un número mayor que 4”, son sucesos aleatorios

Fijado un experimento aleatorio, nombraremos, en general, a los sucesos con letras mayúsculas A, B, C,....

CLASES DE SUCESOS

Suceso seguro:

Suceso imposible:

Suceso contrario:

Inclusión de sucesos:

Suceso elemental:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SUCESOS: Diagrama de VENN

Operaciones con sucesos:

Unión de dos sucesos A y B:

Intersección de dos sucesos A y B:

Diferencia de dos sucesos A y B:

Propiedades : (fáciles de comprobar recurriendo a los gráficos de Venn)

	Unión	Intersección
Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Elemento neutro:	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
Idempotente:	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Leyes de De Morgan:	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

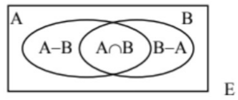
La propiedad asociativa nos permite hallar la unión o intersección de n sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$.

Escribiremos $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Sucesos incompatibles:

PROBABILIDAD AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV:

Consecuencias de los axiomas:



Caso particular: sucesos elementales equiprobables:

En tal caso, si $E = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ es un espacio muestral formado por n sucesos elementales equiprobables, siendo $P(a_i) = p$. Se tendrá entonces que
$E = \{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\{a_3\}\cup ...\cup \{a_n\} \Rightarrow 1 = P(E) = P(a_1)+P(a_2)+P(a_3)+ ...+P(a_n) = n\cdot p$, pues los sucesos elementales son incompatibles $\Rightarrow p = \frac{1}{n}$

Si ahora $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_r\} = \{a_1\}\cup\{a_2\}\cup\{a_3\}\cup ...\cup \{a_r\}$ es un suceso formado por r sucesos elementales, tendremos que:

$$P(A) = P(a_1)+P(a_2)+P(a_3)+ ...+P(a_r) = r\cdot p = \frac{r}{n}$$

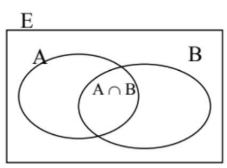
fórmula esta que suele expresarse :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}}$$

y que se conoce como **fórmula de Laplace**.

Ejemplo: En una bolsa hay 5 bolas rojas y 3 negras, todas de idéntico tamaño. Extraemos simultáneamente dos de ellas. Hallar la probabilidad de que las dos sean rojas.

PROBABILIDAD CONDICIONADA



$A \cap B$ es el suceso $A \cap B$ del espacio muestral E
B/A es el suceso $A \cap B$ del espacio muestral A.

Pongamos:
n = nº de sucesos elementales de E
n_A = nº de sucesos elementales de A
n_B = nº de sucesos elementales de B
$n_{A\cap B}$ = nº de sucesos elementales de $A \cap B$
Se tiene:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{n_{A\cap B}}{n_A} = \frac{\frac{n_{A\cap B}}{n}}{\frac{n_A}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

fórmula esta que adoptaremos como definición de la probabilidad condicionada, en espacios muestrales cualesquiera.
De aquí obtenemos:

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A)}$$

SUCESOS DEPENDIENTES O INDEPENDIENTES

Sucesos dependientes e independientes.- Dos sucesos A y B (con $P(A) \neq 0$)se dicen **independientes** si $P(B) = P(B/A)$. En caso contrario se llaman **dependientes**.

Si A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ejemplo 1: Extraemos sucesivamente y con reemplazamiento dos cartas de una baraja de 40. Vamos a calcular la probabilidad de que las dos sean figuras (sota, caballo y rey).

Ejemplo 2: El mismo ejemplo anterior pero ahora haciendo la extracción sin reemplazamiento.

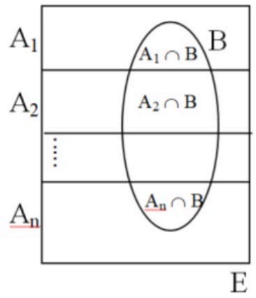
Probabilidad de la intersección de 3 sucesos:

Probabilidad de la intersección de n sucesos:

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Teorema de la probabilidad total.- Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, n sucesos incompatibles dos a dos tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = E$. Sea B un suceso cualquiera. Entonces se cumple que:

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots\ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$



En efecto (véase la figura), $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) =$
$= P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$ ☐

Ejemplo : En una urna U hay 3 bolas rojas y 2 negras y en una urna V hay 5 rojas y 4 negras. Saco una bola de U y la paso a V . Luego saco una bola de V. ¿ Cuál es la probabilidad de que esta segunda bola sea roja ?.

FÓRMULA DE BAYES

Fórmula de Bayes.- Con las mismas hipótesis del teorema de la probabilidad total, se tiene que:

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}}$$

Demostración: $P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$ y de la fórmula de la probabilidad total se obtiene lo que queríamos demostrar. ☐

$P(A_i/B)$ suele llamarse probabilidad a posteriori, $P(A_i)$ probabilidad a priori y $P(B/A_i)$ verosimilitudes.

Ejemplo:
En el ejemplo anterior, supóngase que se ha extraído una bola de V y ha resultado ser roja. ¿ Cuál sería la probabilidad de haber pasado una bola roja de U a V ?.

EJERCICIOS DE EXAMEN

1.-Un grupo de ocho compañeros de trabajo, formado por cuatro mujeres y cuatro hombres, se divide en dos grupos de cuatro personas. ¿Cuál es la probabilidad de que cada grupo tenga el mismo número de hombres que de mujeres?

a) $\cong 0'49$ b) $=0'50$ c) $\cong 0'75$ d) ninguna de las anteriores

2.-Dos votantes, Juana y Pedro, pueden optar entre las alternativas X o Y, o bien votar en blanco o abstenerse. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca un empate, es decir, que las opciones X e Y tengan el mismo número de votos?

a) $1/2$ b) $5/8$ c) $3/8$ d) ninguna de las anteriores

3.- Dados dos sucesos A y B, tales que $A \neq B$, $P(A) < P(B)$, se verifica

a) $P(A/B) > P(A)$ b) $P(A/B) = P(A)$ c) $P(A/B) \neq 0$ d) ninguna de las anteriores

EJERCICIO 1.2 Un dado está trucado de manera que las probabilidades de cada uno de sus sucesos elementales es inversamente proporcional al número que figura en cada cara del dado.

Calcúlese la probabilidad de obtener una puntuación impar.

EJERCICIO 1.3 Se lanzan dos dados. Se define como A al suceso «la suma de los dos números que salen es múltiplo de tres» y como B al suceso «sale al menos un seis».

Obténganse las probabilidades de los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A^* \cap B$ y $(A \cup B)^*$.

EJERCICIO 1.6 Se tienen dos lotes con piezas procedentes de un mismo proceso productivo. Del primer lote (L_1) se sabe que un 1% son defectuosas, en tanto que del segundo (L_2) lo son el 5%. El primer lote tiene el doble de piezas que el segundo.

Se elige aleatoriamente una pieza de esos lotes:

(a) Calcúlese la probabilidad de que la pieza escogida sea defectuosa.

(b) Si la pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del segundo lote?

EJERCICIO 1.7 Se tienen 8 dados regulares y 2 trucados. En estos últimos, la probabilidad de obtener un as es el triple que la de las restantes posibilidades que son entre sí equiprobables.

De entre los 10 dados se elige uno al azar, se arroja al aire y se obtiene un as. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado sea no trucado?

4 .- Se toman al azar tres puntos en el intervalo (0,1). La probabilidad de que el punto que caiga más lejos del origen esté a la derecha de 0'6 es

a) 0'216 b) 0'784 c)0'064 d) ninguna de las anteriores

5 .- Un consultor que trabaja en dos empresas, A y B, utiliza el autobús como medio de transporte. Los autobuses que le llevan a ambas se toman en la misma parada; a las horas exactas el que va a la empresa A y a las horas exactas más un cuarto de hora el que va a la empresa B. Si sale de su casa sin preocuparse de la hora y toma el primero que pasa ¿cuál es la probabilidad de que visite la empresa A?

a) 0'5 b) 0'25 c) 0'75 d) ninguna de las anteriores

6 - Dados dos sucesos A y B, tales que $A \neq B$, $P(A) > \frac{1}{2}$ y $P(B) > \frac{1}{2}$ se verifica

a) $P(A/B) = \frac{1}{2}$ b) $P(A/B) > \frac{1}{2}$ c) $P(A/B) < \frac{1}{2}$ d) ninguna de las anteriores

7.- Dados dos sucesos independientes A y B, se verifica

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
b) $P(A - B) = P(A) - P(B)$
c) $P(A \cup B) = P(A - B)$
d) Ninguna de las anteriores

8. Entre todos los posibles números de siete cifras formados con los dígitos 1 al 7, en los que cada dígito figura una única vez (no se repite ninguno), se elige un número al azar. La probabilidad de que sea múltiplo de 4 será:

a) $4/21$ b) $5/21$ c) $11/21$ d) Ninguna de las anteriores

9 Cuatro personas, Alicia, Blanca, Carlos, David, sacan, sucesivamente, empezando Alicia, una carta de una baraja, devolviéndola después de ver de qué palo es. El primero que saque un oro es el que gana.
¿Cuáles son las probabilidades de cada uno de ellos de ganar la partida?

10 Los señores A y B juegan, alternativamente, con un par de dados perfectos y distinguibles. A gana si consigue 6 puntos antes de que B obtenga 7, y B gana si saca 7 puntos antes de que A tenga 6.
Si A comienza el juego, ¿cuál es su probabilidad de ganar?

1.- Dados dos sucesos A y B, tales que P(A)= $1/_4$, P(B/A) = $1/_2$ y $\mathrm{P(A/B)} = 1/_4$ se cumple

a) $A\subset B$ b) $A\cap B=\emptyset$ c) A y B son independientes d) Ninguna de las anteriores

7.- En un grupo de seis compañeros, formado por tres españoles y tres franceses, se eligen tres para elaborar un informe. La probabilidad de que haya más franceses que españoles entre los seleccionados será

a) $1/_3$ b) $1/_4$ c) $1/_2$ d) Ninguna de las anteriores

JUNY 2023

2. Un ciudadano tiene un pleito con un vecino sobre el que cree, firmemente, que tiene la razón. Para obtener un veredicto se puede optar por dos vías:

* Un tribunal formado por 3 personas que tienen probabilidad p, p, 1/2 respectivamente de emitir un informe individual favorable al vecino A. El informe colectivo se obtiene mediante la regla de la mayoría a partir de los tres informes individuales.

* Acudir a un arbitraje de una persona que tiene probabilidad p de emitir un informe favorable al vecino A.

¿Qué vía elegiría A? Obtenga la probabilidad que tiene A de ganar el pleito en cada una de las alternativas.

2.- Una urna contiene 3 bolas blancas y 7 bolas negras. Si se extraen, sucesivamente, todas las bolas de la urna, la probabilidad de que la segunda bola sea blanca es:

a) $1/_{15}$ b) $7/_{30}$ c) $3/_{10}$ d) Ninguna de las anteriores

SEPTIEMBRE 2022

4.- Dados los sucesos A y B con las siguientes probabilidades: P(A)=0,34; P(B)=0,4 y P(A/B) =0,82. ¿Cuál será la $P(A/\bar{B})$? siendo $\bar{B}$ el complementario de B:

a) 0,02 b)0,012 c)0,034 d) Ninguna de las anteriores

1.- Dados dos sucesos A y B, tales que P(A)= $^1/_4$, P(B/A) = $^1/_2$ y $\mathrm{P(A/B)} = {}^1/_4$ se cumple

a $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ b Son independientes c Son incompatibles d Ninguna de las anteriores

10.- Un grupo de seis compañeros, formado por igual número de mujeres que de hombres, se divide en dos subgrupos de tres para elaborar un trabajo. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer grupo esté formado únicamente por hombres?

JUNY 2022

a $^1/_4$ b $^1/_{20}$ c $^1/_5$ d Ninguna de las anteriores