info@tuacademiafacil.com

1. CONCEPTOS BÁSICOS

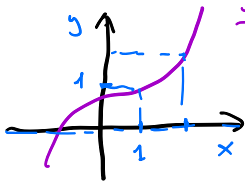
1.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

$f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$

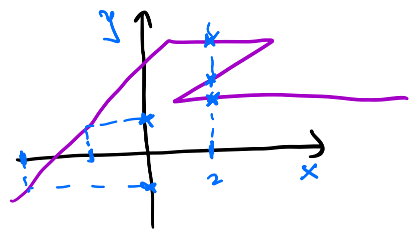
$x \longmapsto y = f(x)$

para cada valor x tenemos un único (como mucho) valor para y.

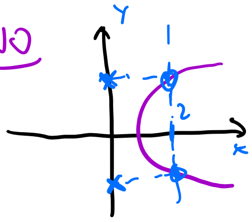
SI



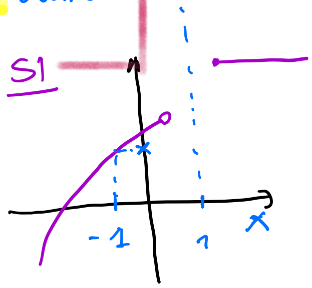
NO



NO



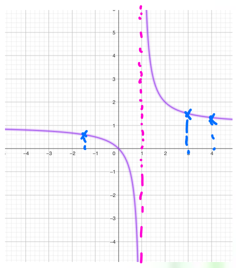
SI



1.2 DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Son todos los valores de x dónde la función está definida.

$\text{dom} f = A = \{x \in A \text{ tales que } y = f(x)\}$



$\Rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Downarrow$

$f(1)$ no existe.

Imagen del 2

$f(2) = 2$

Antiimagen del 3

$f^{-1}(3) = 1'7$

a) Funciones polinómicas.

$y = x^3 + 3x - 1$ $\qquad y = 4$ $\qquad \Rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R}$

$y = 2x + 1$

b) Funciones racionales.

$y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ $\qquad y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad \dfrac{A}{0} \nexists$

$\Downarrow$

$\text{dom}\, y = \{x \in A \text{ tales que } q(x) \neq 0\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$

Ejemplo: $y = \dfrac{3x-1}{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$\text{dom}\, y = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

c) Funciones irracionales.

$y = \sqrt[n]{p(x)} \longrightarrow$ n par

(n par)

$\Rightarrow \text{dom}\, y = \{x \in A \text{ tales que } p(x) \geq 0\}$

$f(x) = \sqrt{x}$

par $\sqrt{-} \nexists$ no existe

n impar

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$\Downarrow$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

Ejemplo: $f(x) = \sqrt{2x+3} \Rightarrow 2x + 3 \geq 0$

$2x \geq -3 \Rightarrow x \geq -3/2$

$\text{dom} f = [-3/2, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{-2x+3} \Rightarrow -2x + 3 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -3$

$2x \leq 3 \Rightarrow x \leq 3/2$

$\text{dom}\, g = (-\infty, 3/2]$

d) Funciones logarítmicas.

$y=\log(p(x)) \Rightarrow p(x)>0$

$\log(-)$ $\nexists$ (no existe)

$\log 0$ $\nexists$ no existe

$\text{dom} f = \{x \in A \text{ tales que } p(x)>0\}$

Ejemplo

$y=\log(\underbrace{x^2-1})$ $\quad x^2-1>0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$+ \quad - \quad +$

$f(-2) \quad -1 \quad f(0) \quad 1 \quad f(2)$

$\Rightarrow \text{dom}\, y = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

abiertos

e) Funciones exponenciales.

$y=A^{f(x)} \qquad \text{dom}(A^{f(x)}) = \text{dom} f(x)$

Ejemplo:

$f_1(x)=e^{x^2}$

$\Downarrow$

$\text{dom} f_1(x)=\mathbb{R}$

$f_2(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$

$\text{dom} f_2(x)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$f_3(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x+2}}$

$\Downarrow$

$\text{dom} f_3=(-\infty,2]$

$-x+2\geq 0$

$-x \geq -2 \Rightarrow \boxed{x\leq 2}$

f) Funciones trigonométricas.

$y=\sin f(x) \Rightarrow \text{dom}(\sin f(x)) = \text{dom} f(x)$

$y=\cos f(x) \Rightarrow \text{dom}(\cos f(x)) = \text{dom} f(x)$

Ejemplo:

$f_1(x)=\sin\sqrt[3]{x-2} \Rightarrow \text{dom}(\sin\sqrt[3]{x-2}) = \text{dom}(\sqrt[3]{x-2})$

$\Downarrow$

$\text{dom} f_1=\mathbb{R}$

$f_2(x)=\cos\left(\frac{1}{x+3}\right) \Rightarrow \text{dom}\left(\cos\left(\frac{1}{x+3}\right)\right) = \text{dom}\left(\frac{1}{x+3}\right)$ $\quad x+3=0 \Rightarrow x=-3$!!

$\Downarrow$

$\text{dom} f_2=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$y=\tan f(x) = \dfrac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \neq 0 \Rightarrow \text{dom} \tan f(x) = \{x \text{ tales que } \cos f(x) \neq 0\}$

$y=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x \qquad \cos x = 0 \Rightarrow$ $\pi/2$, $3\pi/2$ $\quad \text{dom}\, y = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right\}$

EJEMPLOS:

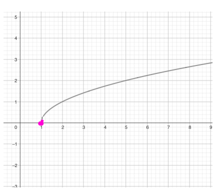
$f_1(x)=x^3 \Rightarrow \text{dom} f_1(x)=\mathbb{R}$ Tenemos una función polinómica.

$f_2(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow$ f. irracional índice par

$x-1\geq 0 \quad x\geq 1$

$\text{dom} f_2(x)=[1,+\infty)$

$=\mathbb{R}\setminus(-\infty,1)$



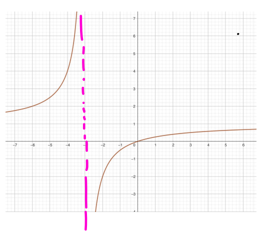
$f_2(x)=\dfrac{x}{x+3} \Rightarrow$ f racional

$x+3=0$

$x=-3$

$\text{dom} f_2(x)=$

$=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$



$f_3(x)=\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\sqrt{x+4}\right)$

f. racional

$x\neq 0$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$

f. irrac.

$x+4\geq 0$

$x\geq -4$

$[-4,+\infty)$

$\text{dom} f_3(x)=[-4,0)\cup(0,+\infty)$

info@tuacademiafacil.com

$$f_4(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x^2-1}}$$

$\to$ f. racional $x^2-1 \neq 0$; $x^2-1=0$, $x^2=1$, $x=\pm 1$

$\to$ f. irracional índice impar

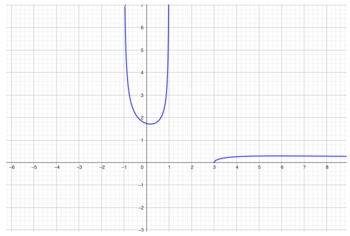
$\frac{x-3}{x^2-1} \geq 0 \Rightarrow$ $x-3=0 \to x=3$; $x^2-1=0 \to x=\pm 1$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & & 3 & \end{array}$$

$f(-2)<0$ $\quad f(0)>0$ $\quad f(2)<0$ $\quad f(4)>0$

$\Downarrow$

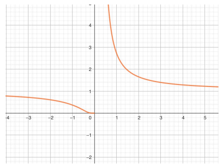
$\text{dom} f_4 = (-1,1) \cup [3,+\infty)$



$f_5(x) = e^{1/x} \Rightarrow$ f. exponencial $\Rightarrow \text{dom}(e^{1/x}) = \text{dom}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Downarrow$

$\text{dom} f_5 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



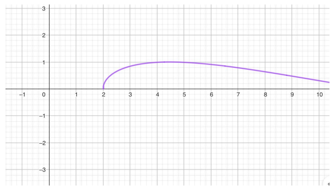
$f_6(x) = \sin(\sqrt{x-2}) \Rightarrow \text{dom} \sin(\sqrt{x-2}) = \text{dom}\sqrt{x-2}$

$x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

$\Downarrow$

$\text{dom} f_6 = [2,+\infty)$



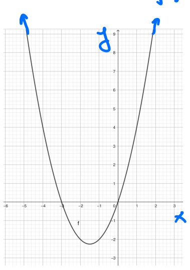
1.3 IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

$\underbrace{\text{IMAGEN}}_{\text{recorrido o rango}}$

$f: \underbrace{A}_{\text{dominio}} \subset \mathbb{R} \to \underbrace{B}_{\text{Im.}} \subset \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = y$

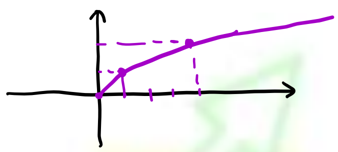
$\text{Im}(f) = B = \{ f(x) : x \in \text{dom} f \}$



$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$\text{Im} f = [-2'25, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}$



$\text{dom} f = [0,+\infty)$

$\text{Im} f = [0,+\infty)$

1.4 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

$(g \circ f)(x) \to$ se lee f compuesto por g.

$\parallel$

$g(f(x))$

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $g(x) = x-3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x-3$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g}$$

$$\underbrace{x \longrightarrow x^2 \longrightarrow x^2-3}_{g \circ f(x)}$$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2-3$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$

$\Rightarrow g \circ f \neq f \circ g$

$\text{dom}(g \circ f) = \{ x \in \text{dom} f \text{ tales que } f(x) \in \text{dom} g \}$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

$g(x) = \sqrt{x-3}$

$$g \circ f = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2} - 3} = \sqrt{\frac{x-1-3(x+2)}{x+2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x-1-3x-6}{x+2}} = \sqrt{\frac{-2x-7}{x+2}}$$

$$f \circ g = f(g(x)) = f(\sqrt{x-3}) = \frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x-3}+2}$$

$\cancel{\neq}$

1.5 FUNCIÓN INVERSA

La función inversa de $f(x)$, se escribe $f^{-1}(x)$ → inversa de f

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$

¿Cómo buscamos la inversa?

1. Escribimos la función cambiando x por y.
2. Despejamos la y.
3. Cambiamos y por $f^{-1}(x)$

Ejemplo 1:

$y = 5x^5+7 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{x-7}{5}}$

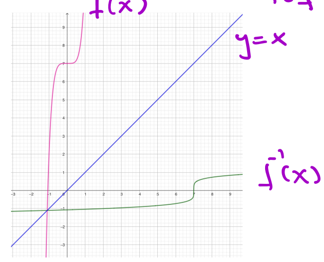
$x = 5y^5+7$

$x-7 = 5y^5$

$\frac{x-7}{5} = y^5 \Rightarrow y = \sqrt[5]{\frac{x-7}{5}}$

Podéis ver $f^{-1} \circ f = x$

$f \circ f^{-1} = x$



$y = \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+2}$

$\Downarrow$

$x(y+2) = y-1$

$xy+2x = y-1$

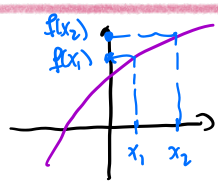
$xy-y = -2x-1$

$y(x-1) = -2x-1 \Rightarrow y = \frac{-2x-1}{x-1}$

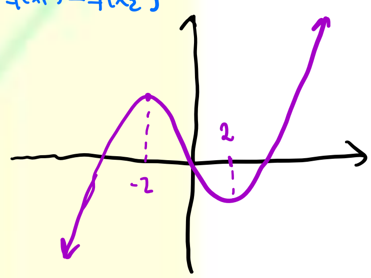
$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$

1.6 FUNCIÓN MONÓTONA.

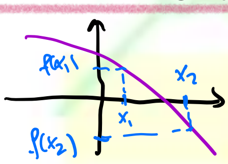
Función creciente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$



es estrictamente creciente $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$



Función decreciente $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



es estrict. decreciente

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Crece $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

decrece $(-2,+2)$

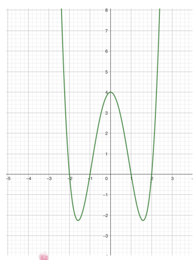
1.7 FUNCIÓN SIMÉTRICA.

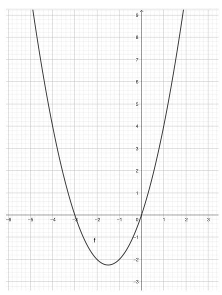
SIMETRÍA PAR $\Rightarrow f(x) = f(-x)$

$f(2) = f(-2)$

$f(3'5) = f(-3'5)$

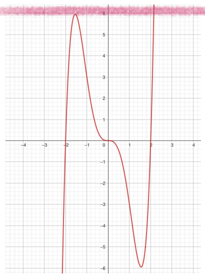
Simétrica respecto eje y's.





No tiene simetrías

SIMETRÍA IMPAR $\Rightarrow f(x) = -f(-x)$



$f(2) = -f(-2)$

$f(3'5) = -f(-3'5)$

Ejemplo:

$f_1(x) = x^4-5x^2+4$

$f_1(-x) = (-x)^4-5(-x)^2+4$

$= x^4-5x^2+4$

$\Downarrow$

$f_1(x) = f_1(-x)$

$\Downarrow$

Simetría PAR

$f_2(x) = x^5-4x^3$

$f_2(-x) = (-x)^5-4(-x)^3$

$= -x^5+4x^3 = -(x^5-4x^3)$

$\Downarrow$

$f_2(x) = -f_2(-x) \Rightarrow$ Simet IMPAR.

$f_3(x) = x^2+3x$

$f_3(-x) = (-x)^2+3(-x)$

$= x^2-3x$

$f_3(x) \neq f_3(-x)$

$f_3(x) \neq -f_3(-x)$

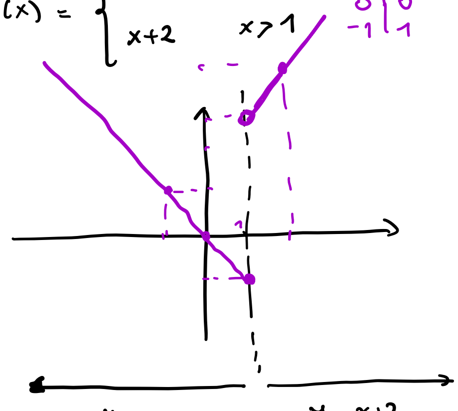
No tiene simetrías.

1.8 FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS.

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \le 1 \\ x+2 & x>1 \end{cases}$$

x	y
1	-1
0	0
-1	1

x	y
1	3
2	4
3	5



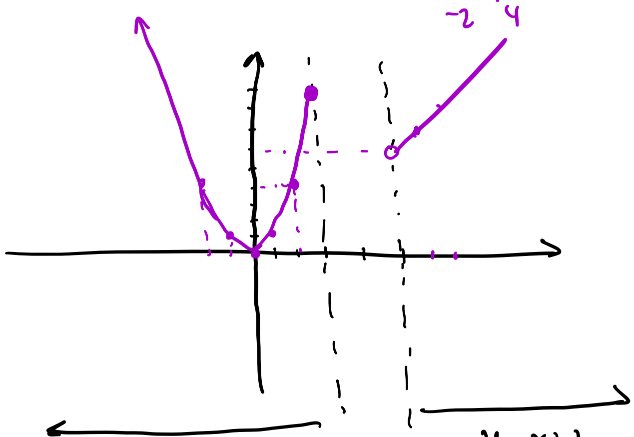
$\text{dom} f(x) = \mathbb{R}$

$\text{Im} f(x) = [-1,+\infty)$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 3 \\ x+1 & x>5 \end{cases}$$

x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4

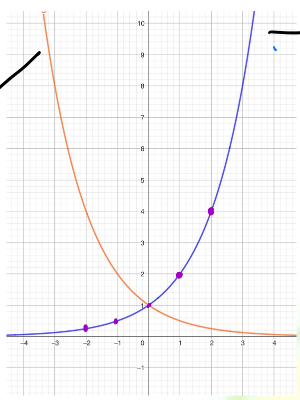
x	y
5	6
6	7
7	8



$\text{dom} f = (-\infty,3] \cup (5,+\infty)$

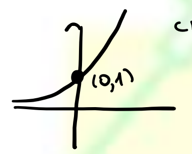
$\text{Im} f = [0,+\infty)$

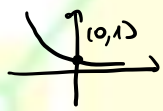
1.9 FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.

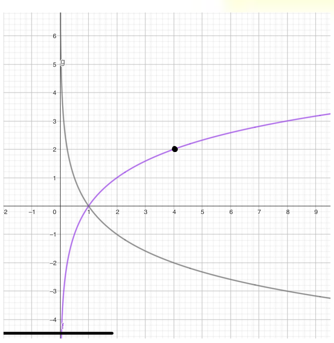


x	y
0	1
1	2
2	4
-1	1/2
-2	1/4

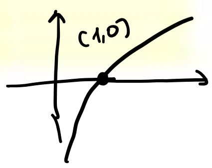
$y=a^x$

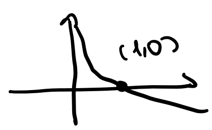
$\to a>1 \Rightarrow$  crece $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

$\to 0<a<1$  decrece $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$



$y=\log_a x$

$\to a>1$  Crece $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$\to 0<a<1$  decrece $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} y=a^x \\ y=\log_a x \end{array}\right\}$ Son funciones inversas

$y=2^x$

x	y
3	8
2	4
1	2
0	1
-1	0'5
-2	0'25

INVERSAS $\longleftrightarrow$ $x \Leftrightarrow y$

$y=\log_2 x$

x	y
8	3
4	2
2	1
1	0
0'5	-1
0'25	-2

$\log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

$\log_2 4 = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$

$\log_2 2 = 1 \Rightarrow 2^1 = 2$

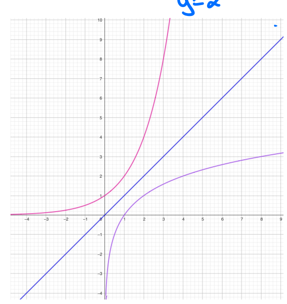
$\log_2 1 = 0 \Rightarrow 2^0 = 1$

$\log_2 0'5 = -1$

$2^{-1} = 0'5$

$\log_2 0'25 = -2$

$2^{-2} = 0'25$



info@tuacademiafacil.com

2. LÍMITES Y CONTINUIDAD

2.1 LÍMITES

2.1.1 DEFINICIÓN DE LÍMITES

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ $\qquad f(1) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

x	y
1'1	2'1
1'01	2'01
1'001	2'001
1'0001	2'0001

(*)

x	y
0'9	1'9
0'99	1'99
0'999	1'999
0'9999	1'9999

(•)

1

izquierda (•) $\qquad$ derecha (*)

Definición Límite

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

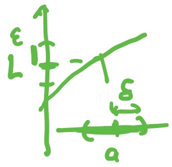
existe

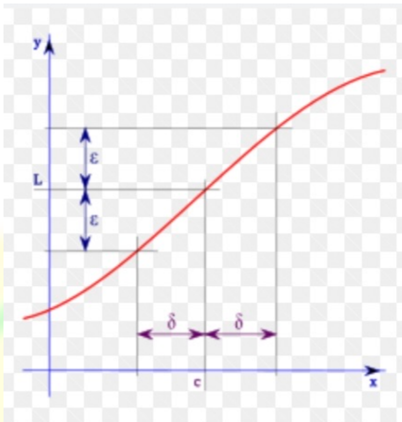
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x-a| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

para todo $\qquad$ Epsilon $\qquad$ delta

representa un nº pequeño





$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{4x+3} = 0'5$

x	y
10	0'44
100	0'493
1000	0'4993
10^6	0'4999993

2.1.2 LÍMITES LATERALES

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x+2} = 0$

derecha

x	y
1'1	0'032
1'01	0'00332
1'001	0'000332
1'0001	0'0000332

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x+2} = 0$

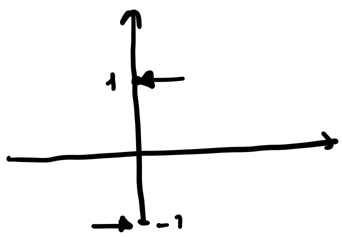
izquierda

x	y
0'9	-0'034
0'99	-0'00334
0'999	-0'0003334
0'9999	-0'000033334

1

1^- izquierda $\qquad$ $1^+ \Rightarrow$ derecha

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = +1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$



-0'01 $\quad$ 0 $\quad$ 0'01

2.1.3 CÁLCULO DE LÍMITES $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $\lim_{x \to a} g(x) = K$

Límite de la suma

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + K$$

Límite de la diferencia

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - K$$

Límite del producto de un $\underbrace{\text{escalar}}_{\text{número}}$ por una función

$$\lim_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot L \qquad c \in \mathbb{R}$$

Límite del producto

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot K$$

Límite del cociente

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{K} \qquad (K \neq 0)$$

Límite de la potencia

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim_{x \to a} g(x)} = L^K$$

2.1.4 INDETERMINACIONES

$A \cdot 0 = 0$ $\qquad \frac{A}{0} = \mp\infty$

$A \cdot \infty = \infty \qquad -A \cdot \infty = -\infty$

$\infty + \infty = \infty \qquad \frac{A}{\infty} = 0$

$\frac{0}{A} = 0 \qquad \frac{\infty}{A} = \infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$

NO SON INDET.

$\frac{\infty}{\infty}$ Ind. $\quad \frac{0}{0}$ Ind $\quad 1^{\infty}$ Ind. $\quad \infty^0$ Ind

$\infty - \infty$ Ind $\quad 0 \cdot \infty$ Ind $\quad 0^0$ Ind

$a^{\infty} \Rightarrow \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \\ \text{Ind} & a=1 \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & a>1 \\ \infty & 0<a<1 \end{cases}$

Tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+3} = \frac{\infty^2-1}{\infty+3} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{\infty+3}{\infty^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+x} = \frac{\infty^2-1}{2\cdot\infty^2+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{grado num} < \text{grado denom} \\ \pm\infty & \text{grado num} > \text{grado denom} \\ K & \text{grado num} = \text{grado den} \end{cases}$$

K: Coeficientes de grado mayor

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x+3} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x+3} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+x} = \frac{1}{2} = 0'5$

x	y
10	
100	
10^4	
10^6	0'4999...

$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x}{5x^2+5x^4+3}}_{1/5} = \frac{\infty}{\infty}$

TIPO $\infty - \infty$

resolvemos suma de fracciones y simplificar

$\lim_{x\to1} \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x+5}{x^2-1}\right) = \frac{3}{0} - \frac{6}{0} = \infty - \infty$ Ind

$\lim_{x\to1} \frac{3(x+1)-(x+5)}{\underset{(x-1)(x+1)}{x^2-1}} = \lim_{x\to1} \frac{3x+3-x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{2x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{1+1} = 1$

multiplicar y dividir por el conjugado. $\to a-b \xRightarrow{\text{conj}} a+b$

$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}}$ $= \infty - \infty$ Ind

$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} =$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2 \qquad (\sqrt{a})^2 = a$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{3}{\infty+\infty} = \frac{3}{\infty} = \underline{0}\big|$$

TIPO $0\cdot\infty$

$\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = 0.\infty$ Ind

Intentamos resolver operaciones

$\lim_{x\to a} (\underset{\downarrow 0}{f(x)}\cdot \underset{\downarrow \infty}{g(x)}) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ L'Hopital

$f(x)\to 0 \quad \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0} \to +\infty$

estudiaremos más tarde.

$$\underbrace{\lim_{x\to 1} \left((x-1)\cdot\left(\frac{x+5}{x^2-1}\right)\right)} = (1-1)\cdot\left(\frac{1+5}{1^2-1}\right) = 0\cdot\frac{6}{0} = 0.\infty \text{ Ind}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+5}{x+1} = \frac{1+5}{1+1} = \frac{6}{2} = \underline{3}\big|$$

$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a.b}{c}$ $\qquad a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$x^2-1^2 = (x-1)(x+1)$

TIPO $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ factorizar polinomios $(x-a)\ldots$ y simplificar

L'Hôpital $\Rightarrow$ necesitamos saber derivar

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2}{x^4+x-18} = \frac{2^2-2}{2^4+2-18} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^4+x-18} = \frac{2^2-4}{2^4+2-18} = \frac{0}{0} \text{ Ind}$$

	1	0	-4
2		2	4
	1	2	0

(x-2)

$1x+2$

Ruffini

	1	0	0	1	-18
2		2	4	8	18
	1	2	4	9	0

$1x^3+2x^2+4x+9$

Ruffini.

$x^2-4 = (x-2)(x+2)$

x^4+x-18
$= (x-2)(x^3+2x^2+4x+9)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^4+x-18} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^3+2x^2+4x+9)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^3+2x^2+4x+9} = \frac{2+2}{2^3+2.2^2+4.2+9}$$

$$= \frac{4}{33} = \underline{\frac{4}{33}}\big|$$

info@tuacademiafacil.com

TIPO 1^{∞}

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty} \Longrightarrow e^{\lim_{x\to\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = 1^{\infty}$$
IND

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$ tenemos el mismo grado cogemos coef de grado mayor.

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}}_{\frac{1}{1}=1}$$

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$e^{\underbrace{\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{1}\right)}} = e^{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{x+1-1\cdot(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$e^{2} \simeq 7'38905$$

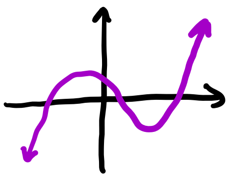
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$$

x	y
10	7'4387
100	7'38954
1000	7'389061
10^6	7'389056

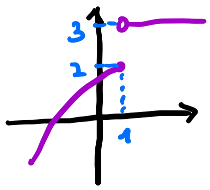
info@tuacademiafacil.com

2.2 CONTINUIDAD

2.2.1 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN



SI CONT



NO CONT.

$\Downarrow$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$

$\not=$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

no cont en $x=1$

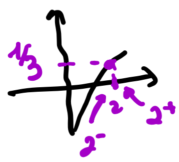
$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } x=a \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \end{array}}$

$f(x)$ continua si es cont en todos los puntos

$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)}_{\text{Tienen que dar un } n^o \neq \pm\infty}$

Ejemplo:

Estudiar continuidad $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en $x=2$ i en $x=-1$



Si es cont en $x=2$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$ $\quad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$

$f(2) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Es cont en $x=2$

Si es cont en $x=-1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$ No es cont en $x=-1$

$\nexists \lim_{x\to -1} f(x)$

2.2.2 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Suma (diferencia) de funciones

La suma (la diferencia) de funciones cont es cont

$f_1(x) = x^2$ cont

$f_2(x) = e^x$ cont

$f_1(x) \pm f_2(x) = x^2 \pm e^x$ cont

Producto de funciones

El producto de funciones cont es una función cont.

$f_1(x) \cdot f_2(x) = x^2 e^x$ cont

Cociente de funciones

El cociente de func cont donde el denom es $\neq 0 \Rightarrow$ es continua.

$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x^2}{e^x}$ cont

e^x nunca es 0

Composición de funciones

Si $g(x)$ f. cont en $x=a$ y $f(x)$ es cont en $g(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(x))$ es cont en $x=a$.

$f_1(x) = x^2$ cont en $x=0$

$f_2(x) = e^x \Rightarrow f_2(0) = e^0 = \underline{\underline{1}}$

$f_2(x) \circ f_1(x) = f_2(x^2) =$

$= e^{x^2}$ cont en $x=0$

Ejemplos Estudiar cont $\left(\frac{x^2-9}{x^2+6}\right)^{(x+1)} = f(x)$

$g(x) = \frac{x^2-9}{x^2+6}$ Siempre cont $\quad h(x) = x+1$ Cont

$x^2+6=0$ ¡!

$\Rightarrow g(x)^{h(x)} = f(x) = \left(\frac{x^2-9}{x^2+6}\right)^{x+1}$ es cont.

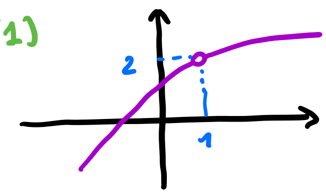
2.2.3 DISCONTINUIDAD

$f(x)$ cont en $x=a \Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

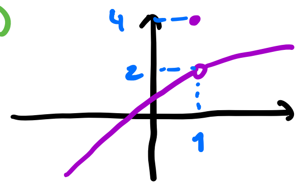
Si no pasa esto en $x=a \Rightarrow f(x)$ es discontinua en $x=a$.

Discontinuidad evitable $\Rightarrow$ $\boxed{\underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)}_{\exists \lim_{x\to a} f(x)} \neq f(a)}$

(1)



(2)



(1) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ $\quad \parallel$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\qquad f(1) \nexists$ (no existe) $\Rightarrow$ No cont en $x=1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \nexists f(1)$

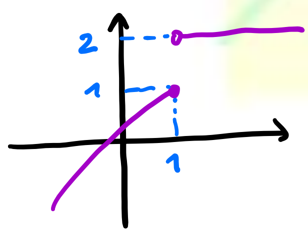
DISC EVITABLE

(2) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ $\quad \parallel$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\qquad f(1) = 4 \Rightarrow$ No cont en $x=1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq f(1)$

DISC EVITABLE

Discontinuidad inevitable de salto finito



$\Rightarrow$ $\boxed{\underbrace{\text{si } \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)}_{\nexists \lim_{x\to a} f(x)} \quad (\neq \pm\infty)}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ No es cont

Des. salto finito

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 3x+1 & x > 1 \end{cases}$ Estudiar continuidad

$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = 3x+1$ $\Big\}$ f. polinómicas $\Rightarrow$ Cont.

Tenemos que estudiar que pasa en $x=1$

Si fuera cont en $x=1$

$\underbrace{\lim_{x\to 1^+} f(x)} = \underbrace{\lim_{x\to 1^-} f(x)} = f(1)$ $\quad 1^2 = 1$

$\lim_{x\to 1^+} 3x+1 = 3+1 = 4 \qquad \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \qquad 4 \neq 1$

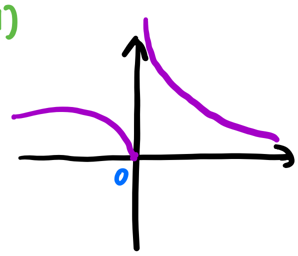
No es cont en $x=1$

disc salto finito.

Discontinuidad inevitable de salto infinito

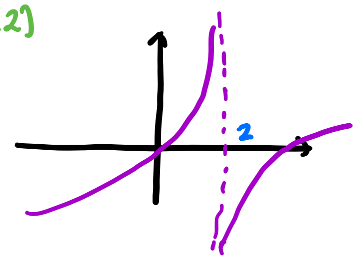
$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty} \Rightarrow \text{disc. salto infinito (disc. asintótica)}$$

(1)



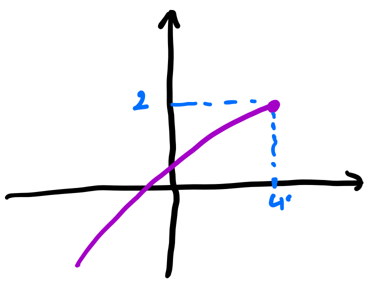
(1) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\}$ discont inevit salto inf. (disc asintótica) en $x=0$

(2)



(2) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty\end{array}\right\}$ disc. inev. salto infinito. en $x=2$

Discontinuidad esencial o de segunda especie



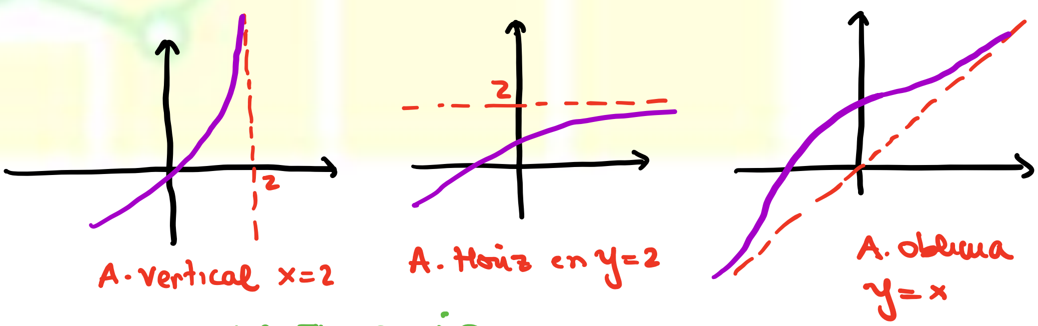
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow \nexists$

$f(4)=2$

en $x=4$ No es cont
discont esencial.

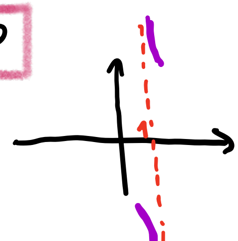
2.2.4 ASÍNTOTAS



Asíntotas verticales

PRIMERO BUSCAMOS EL DOMINIO

$$\boxed{\text{Una función } f(x) \text{ tiene una A. vertical en } x=a \text{ si } \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty}$$



Ejemplo:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Dominio: $\Rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x-1=0$

$x=1$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$ En $x=1$ Tenemos A. vertical.

info@tuacademiafacil.com

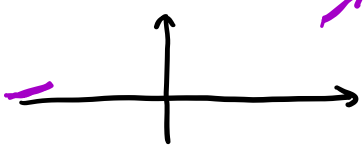
Asíntotas horizontales

La función $f(x)$ tiene A. Horizontal en $y=a$ si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ $\quad a\neq\pm\infty$

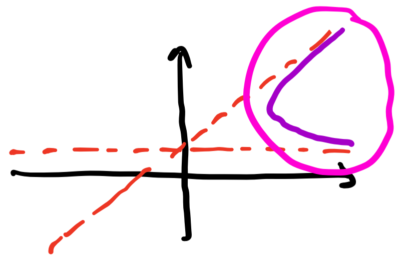
Ejemplo:

$f(x)=e^x$ $\quad \lim_{x\to+\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \Rightarrow$ Tenem A. Horiz en $y=0$ $(x\to-\infty)$



NO FUNC



Si $x\to-\infty$ A. Horiz $\Rightarrow$ No hay oblicuas $x\to-\infty$

Si $x\to+\infty$ A. Horiz $\Rightarrow$ No hay oblicuas $x\to+\infty$

Asíntotas oblicuas

Una función $f(x)$ A. oblicua en $y=mx+n$ si $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ $\quad m\neq\pm\infty$, $\neq 0$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]$ $\quad n\neq\pm\infty$

Ejemplo:

$f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$

$y=mx+n$ $\quad m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x}=\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+2x}}_{\text{Tienen = grado}}=\frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{1}{1}=1\to m$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{1x}{1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1-x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-2x}{x+2}=\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x-1}{x+2}}_{\text{Tienen = grado}}=\frac{-\infty}{\infty}$

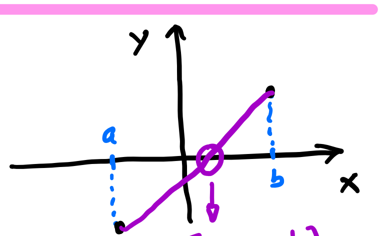
$-2=\frac{-2}{1}$

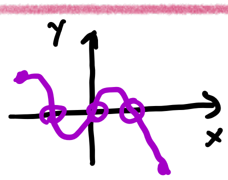
$m=1$
$n=-2$ $\quad$ Tien A. oblicua $y=x-2$

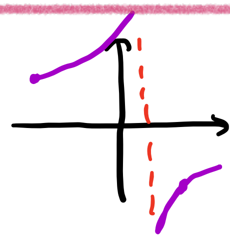
2.2.5 TEOREMAS DE CONTINUIDAD

TEOREMA DE BOLZANO

$\Rightarrow$ T. Bolz: $\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ cont } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$ (existe)







HA DE SER CONTINUA

Ejemplo:

Comprobar que existe una raíz en el intervalo $[-3,-1]$ $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$

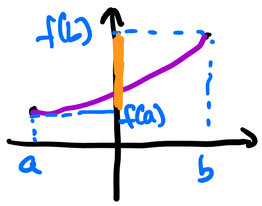
$f(x)$ cont (f. polinómica)

$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ cont } [-3,-1] \\ f(-3)=-30<0 \\ f(-1)=12>0 \end{array}\right\}$ T. Bolzano $\Rightarrow \exists c\in(-3,-1)$ tal que $f(c)=0$

TEOREMA DE VALORES INTERMEDIOS

$f(x)$ Cont $[a,b] \Rightarrow$ Podemos asegurar que existe un valor m entre $f(a)$ y $f(b)$.

$f(c) = m$

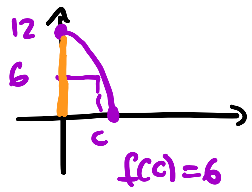


Ejemplo: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ comp. que alcanza el valor 6 en el intervalo $[0,2]$

$f(x)$ cont siempre

$f(x) \Rightarrow$ cont $[0,2]$
$f(0) = 12$
$f(2) = 0$

Podemos asegurar alcanza todos los valores entre $f(0)=12$ y $f(2)=0$ en particular, existe $c \in (0,2)$ donde $f(c) = 6$



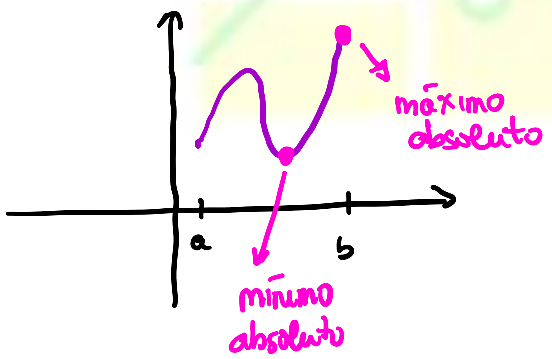
TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS O DE WEIERSTRASS

f cont en $[a,b] \xRightarrow{\text{T. weierst}}$ Tenemos máximo y mínimo absoluto en ese intervalo.

$\exists c$ y $\exists d$

$f(c) \le f(x) \le f(d) \quad \forall x \in [a,b]$

mínimo   máximo



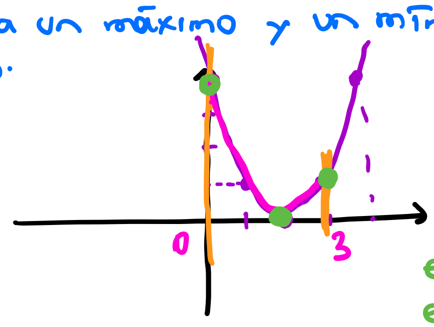
$a>0$ ∪ $a<0$ ∩ $x_v = \frac{-b}{2a}$

Ejemplo: Hallar los extremos $f(x) = x^2 - 4x + 4$ en el intervalo $[0,3]$

$f(x)$ continua $[0,3]$
Por el T. weierst $\Rightarrow$ alcanza un máximo y un mínimo en el intervalo.

x	y
2	0
1	1
3	1
0	4
4	4

$x_v = \frac{4}{2} = 2$



$f(2) = 0 \rightarrow$ mín.
$f(0) = 4$
$f(3) = 1$
⇓
en $x=2$ mínimo abs
en $x=0$ máximo abs

info@tuacademiafacil.com

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^5-3x^4-3x+9}{x^2-6x+9} = \dfrac{\cancel{3^5-3\cdot 3^4}-\cancel{3\cdot 3+9}}{3^2-6\cdot 3+9} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 3 & & 3 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \qquad (x-3)(x^4-3)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -6 & 9 \\ 3 & & 3 & -9 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \qquad (x-3)\cdot(x-3)$$

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x^4-3)}{\cancel{(x-3)}(x-3)} = \dfrac{3^4-3}{3-3} = \dfrac{78}{0} = \pm\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2-8x+12}} = \dfrac{\sqrt{2^2-5\cdot 2+6}}{\sqrt{2^2-8\cdot 2+12}} = \dfrac{\sqrt{0}}{\sqrt{0}} = \dfrac{0}{0}$ Indeterminación

Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array} \quad \text{grado 2} \to \text{grado 1} \qquad (x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -8 & 12 \\ 2 & & 2 & -12 \\ \hline & 1 & -6 & 0 \end{array} \qquad (x-2)(x-6)$$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{(x-2)(x-3)}}{\sqrt{(x-2)(x-6)}} = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-6)}} = \sqrt{\dfrac{(2-3)}{(2-6)}} = \sqrt{\dfrac{-1}{-4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5-x}{\sqrt{5}-\sqrt{x}} = \dfrac{5-5}{\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \dfrac{0}{0}$ Ind.

Multiplicamos conjugado $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(5-x)(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{5}-\sqrt{x})(\sqrt{5}+\sqrt{x})} =$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(5-x)(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\cancel{(5-x)}(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{\cancel{5-x}} = \sqrt{5}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{a^2} = a$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{1-x} = \dfrac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ Ind

Multiplicamos conjugado $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(1-x)(\sqrt{x}+1)} =$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(1-x)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(1-x)(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = -\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{4-2x+x^2}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}} = \dfrac{0}{0}$ Ind

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{4+2x+x^2}-\sqrt{4-2x+x^2})(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{((\cancel{4}+2x+\cancel{x^2})-(\cancel{4}-2x+\cancel{x^2}))\cdot(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{\underbrace{(2+x)-(2-x)}_{}(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x(\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{\sqrt{4+2x+x^2}+\sqrt{4-2x+x^2}} = \dfrac{2\cdot\overbrace{(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0})}^{2\sqrt{2}}}{\sqrt{4+0+0}+\sqrt{4-0+0}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

2. Calcular el límite de la siguiente función en $x = 10$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+5} & \text{si } x < 10 \\ \sqrt{8x+1} & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

Recordad: el límite existe si $\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 10^+} \sqrt{8x+1} = \sqrt{8\cdot 10+1} = \sqrt{81} = 9$

$\lim\limits_{x\to 10^-} \dfrac{x^2}{x+5} = \dfrac{10^2}{10+5} = \dfrac{100}{15} = \dfrac{20}{3}$

Como $\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 10^-} f(x)$

$\Downarrow$

$\nexists \lim\limits_{x\to 10} f(x)$

no existe

info@tuacademiafacil.com

3. Calcular los siguientes límites en el infinito:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$. $= \frac{1}{\infty} = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x^3-4x+3)$. $= (-\infty)^3 - 4(-\infty) + 3 = -\infty$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{(5x+2)(x+3)}{-(x+6)^2}$. $= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+15x+2x+6}{-x^2-12x-36} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind.

$-(x^2+12x+36)$

Tienen el mismo grado. $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{-1} = -5$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+2x+5}{2x+6}$. $= \frac{\infty}{\infty}$ Ind. $\Rightarrow$ grado num > grado denominador $\Rightarrow \pm\infty$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2+2x+5}{2x+6} = \frac{-\infty}{-} \longrightarrow +\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{6x^3+3x^2+8}^{\text{grado }3}}{x+\underbrace{\sqrt{9x^6}}_{\text{grado }3}+23}$. $= \frac{\infty}{\infty}$ Ind $\Rightarrow$ Tienen el mismo grado $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+9x^2+8}{x+\sqrt{9x^6}+23} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}}{2+3x^{-1}+4x^{-2}+5x^{-3}}$. $= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+3\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x^2}+5\cdot\frac{1}{x^3}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{2+3\cdot\frac{1}{\infty}+4\cdot\frac{1}{\infty}+5\cdot\frac{1}{\infty}}$

$= \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$

g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3+5x+4x^2+x^5}{4+x^2}$. $= \frac{\pm\infty}{\infty}$ Ind. El grado numerador > grado denominador $\Rightarrow \pm\infty$

$-\infty$

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2+2}{x-3}}$. $= (\lim_{x\to\infty} e)^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x-3}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x-3}} = e^{+\infty} = +\infty$

grado num > grad den $\Rightarrow \pm\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{3x}\right)^{\frac{4x^2+2}{3x^2+5x}}$ $= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-1}{3x}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2}{3x^2+5x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$

(Tienen mismo grado)

$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x$. $= \left(\frac{4}{3}\right)^{\infty} = \infty$

Recordad: $a^{\infty} \Rightarrow \begin{cases} \infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \\ \text{Ind} & a=1 \end{cases}$

d) $\lim_{x\to-\infty} 3^{x+5}$. $= 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a=\frac{5}{6}$ $0<a<1$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^{\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty$

5. Calcular los siguientes límites: grado num > grado denom.

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x}-\frac{x}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{2x} - \lim_{x\to\infty} x = \infty-\infty$ Indeterminación

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3-x\cdot 2x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}-3-\cancel{2x^2}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{2x} = \frac{-3}{\infty} = \boxed{0}$

$a-b \xrightarrow{\text{conj}} a+b$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) = \infty-\infty$ Tenemos que multiplicar por el conjugado

$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}+3-\cancel{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \frac{3}{\infty} = \boxed{0}$

$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

$\sqrt[2]{x^2}=x$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x}-2x\right) = \infty-\infty$ Indeterm. Multiplicamos por el conjugado

$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+2x}-2x)(\sqrt{4x^2+2x}+2x)}{(\sqrt{4x^2+2x}+2x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{4x^2}+2x-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+2x}+2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{4x^2}+2x+2x} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind

grado 1 — grado 1 — grado 1

$\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$

Tienen el mismo grado $\Rightarrow$ Nos quedamos con los coef de grado mayor $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

grado num > grado den.

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x^4}{x^2+1}+\frac{5x^3}{x+1}\right) = -\infty+\infty$ Ind

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2-x^4)(x+1)+5x^3(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+2-x^5-x^4+5x^5+5x^3}{x^3+x^2+x+1} =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-x^4+5x^3+2x+2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ Indet.

el grado num > grado denom $\Rightarrow \pm\infty$

$\Rightarrow \boxed{+\infty}$

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando el tipo de discontinuidad existente en su caso:

6. $f(x) = x^3(x-1)$.

función polinómica $\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R}$
siempre son continuas en todos los puntos

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-49}$.

función racional $x^2-49=0 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=\pm 7$
dom $f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 7\}$

Siempre continua menos en $x=7$ y en $x=-7$ que tenemos que estudiar.

En $x=7$ $\lim_{x\to 7} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0} = \pm\infty$ $\begin{cases} \lim_{x\to 7^+} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 7^-} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$

$\rightarrow$ en $x=7$ NO es cont y tenemos una discont inevitable salto infinito.

En $x=-7$

$\lim_{x\to -7} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0} = \pm\infty$ $\begin{cases} \lim_{x\to -7^+} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -7^-} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$

$\rightarrow$ En $x=-7$ No es cont y tenemos una discont inevitable salto infinito.

8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+15}{x^2-9}}$.

$\frac{3x+15}{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow$ $3x+15=0$, $x=-5$; $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$

$-$ $+$ $-$ $+$
$f(-6)$ -5 $f(-4)$ -3 $f(0)$ 3 $f(5)$

dom $f = [-5,-3) \cup (3,+\infty)$

$x=-5$ $\lim_{x\to -5^+} \sqrt{\frac{3x+15}{x^2-9}} = 0$ $\lim_{x\to -5^-} f(x) \nexists \Rightarrow$ discont esencial

$x=-3$ $\lim_{x\to -3^-} \sqrt{\frac{3x+15}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{6}{0^+}} = +\infty \Rightarrow$ discont inevitable salto infinito.

$x=3$ $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{\frac{3x+15}{x^2-9}} = \sqrt{\frac{24}{0^+}} = +\infty \Rightarrow$ discont inevitable salto infinito.

La función es continua en todos los puntos de su dominio, menos $x=5$, $x=-3^-$, $x=3^+$.

9. $f(x) = \begin{cases} -x^2+6 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } 2 < x \leq 6 \\ (x-4)^3 & \text{si } 6 < x \leq 20 \end{cases}$

dom $f = (-2, 20]$ $\boxed{x=-2}$ y $x=20$ discont esencial

Aunque $-2 \notin$ dom f

En $x=2$ $f(2) = -2^2+6 = 2$

$\lim_{x\to 2^+} x+2 = 4 \neq \lim_{x\to 2^-} -x^2+6 = -2^2+6 = 2$

$\rightarrow$ discont inevitable salto finito

En $x=6$

$\lim_{x\to 6^+} (x-4)^3 = (6-4)^3 = 8$

$\lim_{x\to 6^-} x+2 = 6+2 = 8$

$f(6) = 6+2 = 8$

$\Rightarrow$ Como $\lim_{x\to 6^+} f(x) = \lim_{x\to 6^-} f(x) = f(6) \Rightarrow$ Si que es cont en $x=6$

Conclusión: Dentro del dominio la función siempre es cont menos en:

$x = -2^+ \Rightarrow$ disc esencial $\nexists \lim_{x \to -2^-} f(x) \Rightarrow$ Pero el $2 \notin$ dom f por tanto no hace falta decirlo.

$x = 2 \Rightarrow$ disc inevitable salto finito

$$\underbrace{\lim_{x \to 2^+} f(x)}_{L} \neq \lim_{x \to 2^-} f(x) = K \qquad K \neq \pm\infty \quad L \neq \pm\infty$$

f. polinómica $\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R}$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$ dom $f = [0, +\infty)$

dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ No está aquí dentro.

Continuidad: En $x=0$ discontinuidad esencial

$\lim_{x \to 0^+} x^2 = 0^2 = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) \nexists$ no tenemos función, la función empieza en $x=0$

En $x=1 \Rightarrow$ Si es cont en $x=1$

$$\underbrace{\lim_{x \to 1^+} f(x)}_{\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1} = \underbrace{\lim_{x \to 1^-} f(x)}_{\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1} = f(1) = 1^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Es cont en $x = 1$

La función es cont en todo su dominio menos en $x = 0$ disc. esencial

info@tuacademiafacil.com

1. El valor del límite $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+6x+5x^3}{2x^2+x}$ es

a) $\frac{1}{2}$
b) 0.
c) 6.

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x^2+6x+5x^3}{2x^2+x}}= \frac{0+0+0}{0+0} = \frac{0}{0} \text{ Ind}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x+6+5x^2)}{x(2x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+6+5x^2}{2x+1} = \frac{0+6+0}{0+1} = \frac{6}{1} = 6$$

2. El valor del límite $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+3x^2+2x+5}{2x+6}$ es

a) 0.
b) ∞.
c) $\frac{1}{2}$.

$$\underbrace{\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+3x^2+2x+5}{2x+6}} = \frac{-\infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Ind.}$$

Como grado num > grado denom $\Rightarrow \pm\infty$

$+\infty$

3. El valor del $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2+3x+6} - \frac{x^2}{x+1}\right)$ es

∞ ∞

a) 0.
b) -2.
c) ∞.

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2+3x+6} - \frac{x^2}{x+1}\right)} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x^3-1)(x+1) - x^2(x^2+3x+6)}{(x^2+3x+6)(x+1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^4}+x^3-x-1-\cancel{x^4}-3x^3-6x^2}{x^3+x^2+3x^2+3x+6x+6} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3-6x^2-x-1}{x^3+4x^2+9x+6}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Tienen el mismo grado $\Rightarrow \frac{-2}{1} = -2$

4. Los posibles puntos de discontinuidad de $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49}$ son

a) $x=7, x=-7$.
b) $x=7, x=-7, x=0$.
c) $x=0$.

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 7\}$ $\quad x^2-49=0 \quad x^2=49 \quad x=\pm 7$

No lo pregunta.

en $x=7$ i en $x=-7$ discont inevitable salto inf.

$$\lim_{x\to 7^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = \frac{\sqrt[3]{7}}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 7^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = \frac{\sqrt[3]{7}}{0^-} = -\infty$$

En $x=7$ A. vertical.

$$\lim_{x\to -7^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = \frac{\sqrt[3]{-7}}{0^-} = +\infty \qquad \lim_{x\to -7^-} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2-49} = \frac{\sqrt[3]{-7}}{0^+} = -\infty$$

En $x=-7$ A. vert.

5. La función $f(x) = xe^{1/x}$ es

a) Continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) Continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
c) Continua en $(0, +\infty)$.

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = x$ f. polinómica siempre continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f_2(x) = e^{1/x} \to$ exponente hay una f. racional $\Rightarrow \frac{1}{x} = g(x)$ dom $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$

$\text{dom}(e^{1/x}) = \text{dom}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow$ Continua $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

6. Al estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en el punto $x=1$ se tiene que

a) Es continua en el punto.
b) Tiene una discontinuidad evitable.
c) Tiene una discontinuidad inevitable.

es cont en $x=1$ si cumple:

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^+} f(x)} = \underbrace{\lim_{x\to 1^-} f(x)} = f(1) \to f(1) \nexists \quad f(1) = \frac{1}{1-1} \nexists$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

discont inevitable salto infinito.

7. Si $\lim_{x\to c} f(x) = a$, entonces $f(c) = a$

a) Para cualquier par de puntos a y c.

b) Solo si $f(x)$ es continua en c.

c) Solo si $f(x)$ es continua en a.

Recordad: $f(x)$ cont en $x=c$ si

$$\underbrace{\lim_{x\to c^+} \overset{a}{f(x)} = \lim_{x\to c^-} \overset{a}{f(x)}}_{\lim_{x\to c} f(x) = a} = \overset{a}{f(c)} \Rightarrow f(x) \text{ cont en } x=c$$

8. La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2-49}$ tiene

a) Asíntota horizontal en $y = 7$.

b) Asíntota vertical en $x = 7$ y $x = -7$.

c) No tiene asíntotas.

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 7\}$ $\quad x^2-49=0$, $x^2=49$, $x=\pm 7$

En $x=7$ Hay una A. vertical si

$$\lim_{x\to 7} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \begin{cases} \lim_{x\to 7^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 7^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

En $x=-7$ Hay A. vertical

$$\lim_{x\to -7} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \begin{cases} \lim_{x\to -7^+} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -7^-} \frac{1}{x^2-49} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

9. Si $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$, quiere decir que

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$.

b) La función está definida en $x = -a$.

c) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Recordad:

Si en $x=a$ hay A. vertical

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

10. La función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ tiene

a) Una asíntota horizontal en $x = 1$ y otra oblicua en $y = x + 1$.

b) Una asíntota vertical en $x = 1$ y otra oblicua en $y = x + 1$.

c) Solo una asíntota horizontal en $x = 1$.

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

A. verticales

En $x=1$ hay A. vertical ya que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty \quad \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

A. Horizontal

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Ind} \Rightarrow$$

Como grado num > grado denominador $\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

No hay A. Horiz

A. Oblicuas: $y = mx+n \Rightarrow \boxed{y = x+1}$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} : x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ Ind}$$

Como tienen el mismo grado. $\Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{1} = 1}$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + x}{x-1}$$

Como tienen el mismo grado

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \boxed{n=1}$$

info@tuacademiafacil.com

3.1 CONCEPTO DE LA DERIVADA

3.1.1 TASA DE VARIACIÓN

$t \;,\; t-1$

$\downarrow \quad \downarrow$

$x_t \quad x_{t-1}$

$$\boxed{\Delta x = x_t - x_{t-1}}$$

$\Delta x > 0 \Rightarrow$ Hay increm.

$\Delta x < 0 \Rightarrow$ Hay decrem.

Precio Petroleo:

12-2016 $\Rightarrow$ 50,56€

12-2017 $\Rightarrow$ 54,38€

$\Delta x = 54{,}38 - 50{,}56 = 3{,}82$ € .

Tasa de variación porcentual

$$\boxed{T = \frac{\Delta x}{x_{t-1}} \cdot 100 = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \cdot 100}$$

$$T = \frac{\Delta x}{x_{t-1}} \cdot 100 = \frac{3{,}82}{50{,}56} \cdot 100 = 7{,}55\,\%$$

Tasa de variación media

$$\boxed{TM = \frac{\Delta x}{t} = \frac{x_t - x_{t-1}}{t}}$$

$$TM = \frac{\Delta x}{t} = \frac{3{,}82}{1} = 3{,}82$$

3.1.3 TASA DE VARIACIÓN INSTANTÁNEA

Tenemos una función $f(x)$

$x_1 \rightarrow f(x_1)$

$x_2 \rightarrow f(x_2)$

$$TVM = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Suponemos tomamos 2 valores muy cercanos $x \,,\, x+h$ donde $h \to 0$

$$\boxed{TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Ejemplo: $f(x) = x^2$ Buscar la T.V.I .

$f(x) = x^2$

$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = 2x$$

3.1.4 EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE

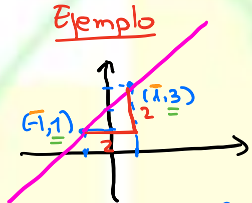
Pendiente de una recta

$P_1 = (x_1, y_1)$

$P_2 = (x_2, y_2)$

$$\boxed{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Ejemplo

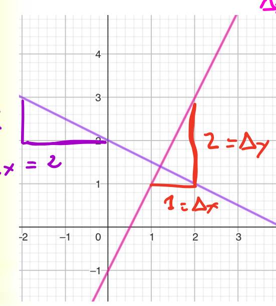


$$m = \frac{3-1}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

$\Delta y = 1$

$\Delta x = 2$



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$

Ecuación de una recta

Necesitamos $m \rightarrow$ pendiente, $(x_1, y_1) \rightarrow$ punto

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ejemplo: Ecuación de la recta que pasa $(-1, 1)$ y $(1, 3)$

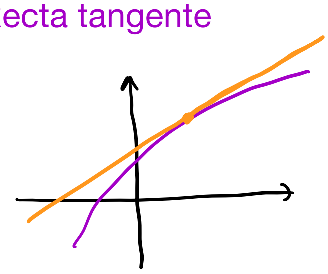
1) Pendiente: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{1-(-1)} = \frac{2}{2} = 1$

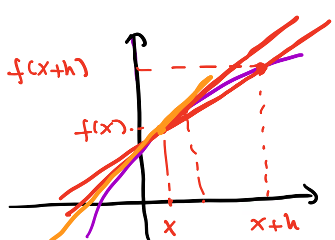
2) Punto: $(-1, 1)$

$y - 1 = 1 \cdot (x - (-1))$

$y - 1 = x + 1 \Rightarrow y = x + 2$

Recta tangente





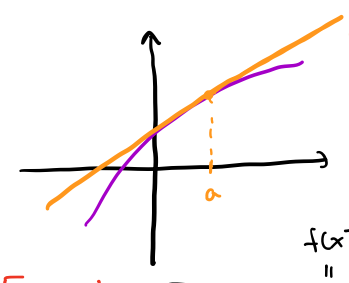
$\Rightarrow$ la recta que pasa por dos puntos super próximos $h \to 0$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \rightarrow \text{la pendiente de la recta tangente.}$$

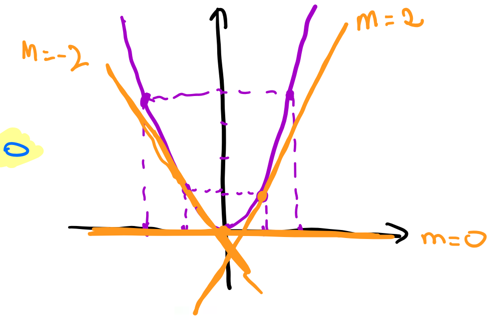
3.1.5 DERIVADA EN UN PUNTO. Interpretación geométrica

La derivada de $f(x)$ en un punto $x=a$ se denota $f'(a) \rightarrow$ la pendiente de la recta tangente en este punto



$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Ejemplo: Tenemos $f(x) = y = x^2$ la derivada en $x=0$ y en $x=1$



$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

$f(0) = 0^2 = 0 \quad f(h) = h^2$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2$$

$f(1) = 1^2 = 1$

$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$

3.1.6 DERIVADAS LATERALES

Derivada lateral por la derecha: $\boxed{f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

Derivada lateral por la izquierda: $\boxed{f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

Ejemplo:

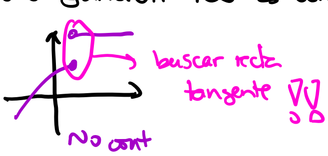
Derivadas laterales de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x=2$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4$$

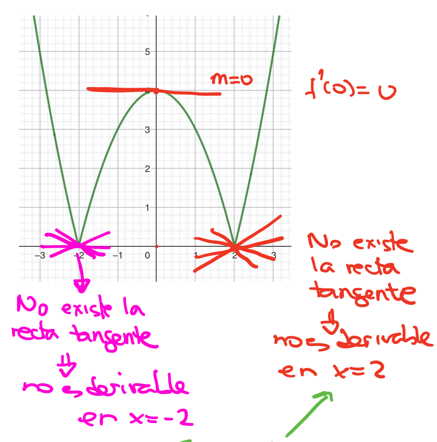
$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(4+h)\cancel{h}}{\cancel{h}} = 4$$

3.2 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

* Si una función NO es continua $\Rightarrow$ No es derivable.



* Si una función es CONTINUA $\Rightarrow$ Puede ser derivable o no



Una función es derivable si $f'(a^+) = f'(a^-)$

* Si la función es derivable en $x=a \Rightarrow$ Seguro que es cont en $x=a$

Si que es continua en $x=2$ y $x=-2$

3.3 CALCULO DE DERIVADAS   TABLA

$y=k \rightarrow y'=0$ $y=2 \rightarrow y'=0$ $y=e \rightarrow y'=0$

$y=x^n \rightarrow y'=n\cdot x^{n-1}$ $y=x^7 \rightarrow y'=7\cdot x^6$ $y=x^5 \rightarrow y'=5x^4$

$y=f(x)^n \rightarrow y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$ $y=(x^3+2)^7 \rightarrow y'=7\cdot(x^3+2)^6\cdot 3x^2$

$y=kx \rightarrow y'=k$ $y=5x \rightarrow y'=5$ $y=\pi x \rightarrow y'=\pi$

$y=e^x \rightarrow y'=e^x$ $y=e^x \rightarrow y'=e^x$ $y=x^6+e^x+5x+3 \rightarrow y'=6x^5+e^x+5$

$y=e^{f(x)} \rightarrow y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ $y=e^{3x^2} \rightarrow y'=e^{3x^2}\cdot 6x$ $y=e^{x^6+5x-1} \rightarrow y'=e^{x^6+5x-1}\cdot(6x^5+5)$

$y=a^x \;\; a>0 \rightarrow y'=a^x\cdot \ln a$ $y=2^x \rightarrow y'=2^x\cdot\ln 2$ $y=\pi^x \rightarrow y'=\pi^x\cdot\ln\pi$.

$y=a^{f(x)} \Rightarrow y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)$ $y=2^{x^2-3x} \longrightarrow y'=2^{x^2-3x}\cdot(2x-3)$

$y=\sqrt{x} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y=x^3+\sqrt{x} \rightarrow y'=3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=\sqrt{f(x)} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$ $y=\sqrt{x^3+2x} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3+2x}}\cdot(3x^2+2)=\frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}$

$y=\sqrt[n]{x} \rightarrow y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $y=\sqrt[3]{x} \rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $y=\sqrt[3]{x}=x^{1/3} \rightarrow y'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-2/3}=$

$=\frac{1}{3x^{2/3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $x^{-a}=1/x^a$ $x^{n/m}=\sqrt[m]{x^n}$

$y=\sqrt[n]{f(x)} \rightarrow y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}\cdot f'(x)$ $y=\sqrt[3]{x^2} \rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=\frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$y=x^{2/3} \rightarrow y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3x^{1/3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$y=\ln x \rightarrow y'=\frac{1}{x}$ $y=e^x+\ln x \rightarrow y'=e^x+\frac{1}{x}$

$y=\ln f(x) \rightarrow y'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $y=\ln(x^2+1) \rightarrow y'=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}$

$y=\log_a x \rightarrow y'=\frac{1}{x\ln a}$ $y=\log_2 x \rightarrow y'=\frac{1}{x\ln 2}$ $y=\log_5 x \rightarrow y'=\frac{1}{x\cdot\ln 5}$

$y=\log_a f(x) \rightarrow y'=\frac{1}{f(x)\cdot\ln a}\cdot f'(x)$ $y=\log_3(x^5) \rightarrow y'=\frac{1}{x^5\ln 3}\cdot 5x^4=\frac{5}{x\ln 3}$

$y=\operatorname{sen} x \rightarrow y'=\cos x$

$y=\operatorname{sen} f(x) \rightarrow y'=\cos f(x)\cdot f'(x)$ $y=\operatorname{sen}\sqrt{x} \rightarrow y'=\cos(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$y=\cos x \rightarrow y'=-\sin x$

$y=\cos f(x) \rightarrow y'=-\sin f(x)\cdot f'(x)$ $y=\cos(x^3+3x) \rightarrow y'=-\operatorname{sen}(x^3+3x)\cdot(3x^2+3)$

$=-(3x^2+3)\cdot\operatorname{sen}(x^3+3x)$

$y=\tan x \rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$y=\tan f(x) \rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 f(x)}\cdot f'(x)=(1+\tan^2 f(x))\cdot f'(x)$ $y=\tan(x^2)$ $\nearrow$ $y'=\frac{1}{\cos^2(x^2)}\cdot 2x$; $\searrow$ $y'=(1+\tan^2 x^2)\cdot 2x$

$y = \arctan x \rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$y = \arctan f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$

$y = \arctan\sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

$y = \arcsin x \rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arcsin f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$

$y = \arcsin(x^3+2) \rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^3+2)^2}} \cdot 3x^2$

$y = \arccos x \rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$

$y = \arccos(e^x) \rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x$

$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$

$y = e^x + \ln x - x^3 \Rightarrow y' = e^x + \dfrac{1}{x} - 3x^2$

$y = K \cdot f(x) \rightarrow y' = K \cdot f'(x)$

$y = 3e^{x^2} \rightarrow y' = 3 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 6xe^{x^2}$

$y = \dfrac{f(x)}{K} \rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{K}$

$y = \dfrac{x^5}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 4x \rightarrow y' = \dfrac{5x^4}{4} - \dfrac{6x}{2} + 4 = \dfrac{5x^4}{4} - 3x + 4$

$y = f(x) \cdot g(x) \longrightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$y = x^2 \cdot e^x \rightarrow y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

$y = \dfrac{x^2+1}{x-3} \rightarrow y' = \dfrac{2x \cdot (x-3) - (x^2+1) \cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{2x^2 - 6x - x^2 - 1}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x - 1}{(x-3)^2}$

$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$y = (x^3+5x)^4 \longrightarrow y' = 4(x^3+5x)^3 \cdot (3x^2+5)$

$y = \cos(x^2+1)^3 \longrightarrow y' = -\sin(x^2+1)^3 \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot 2x$

$y = \sin\sqrt{5x-1} \rightarrow y' = \cos\sqrt{5x-1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{5x-1}} \cdot 5$

$y = \ln\sqrt{5x+3} \rightarrow y' = \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{5x+3}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{5x+3}}}_{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a} \cdot 5 = \dfrac{5}{2(5x+3)}$

3.4 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

$$x^2 \cdot y + 3y^2 + x = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2y + 3y^2 + x) = \frac{dy}{dx} \cdot 1$$

$$2x \cdot y + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 6y \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 6y) = -2xy - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - 1}{x^2 + 6y}$$

$$y^3 - y^2 - x^2 - x = 1$$

$$\frac{dy}{dx}(y^3 - y^2 - x^2 - x) = \frac{dy}{dx} \cdot 1$$

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2x - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 2y) = 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{3y^2 - 2y}$$

3.5 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

$$y = f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$ Recordad: $\log n^m = m \cdot \log n$

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x) \right]$$

$$y = x^{2x+1}$$

$$\ln y = \ln x^{2x+1}$$

$$\ln y = (2x+1) \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \ln x + (2x+1) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \left[2 \cdot \ln x + (2x+1) \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$y' = x^{2x+1} \cdot \left(2 \ln x + \frac{2x+1}{x} \right)$$

info@tuacademiafacil.com

1. Estudiar la derivabilidad de $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{1) Continuidad en } x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}} \end{array}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} -x = 0 \qquad \Rightarrow f \text{ cont en } x=0$$

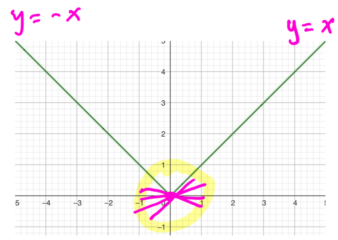
$\Downarrow$

puede ser derivable o no.

2) Derivabilidad en $x=0$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$



$\boxed{\text{Como } f'(0^+) \neq f'(0^-) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=0}$

2. Hallar las siguientes derivadas aplicando la definición de derivada en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$, en $x_0 = 0$.

$$f(h) = h^2 - 6h + 2$$
$$f(0) = 0^2 - 6\cdot 0 + 2 = 2$$

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 6h + \cancel{2} - \cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-6h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h-6}{1} = 2\cdot 0 - 6 = -6$$

Si no utilizamos la definición:

$$f(x) = x^2 - 6x + 2 \longrightarrow f'(x) = 2x - 6$$
$$f'(0) = 2\cdot 0 - 6 = -6$$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, en $x_0 = 1$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$$

$$f(1) = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1+h) = \frac{1+h}{1+h-3} = \frac{1+h}{h-2}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h}{h-2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+h}{h-2} + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(1+h)+1\cdot(h-2)}{2(h-2)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{2}+2h+h-\cancel{2}}{2(h-2)}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{3h}{2(h-2)} : h\right) = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{2\cancel{h}(h-2)} = \frac{3}{2(0-2)} = -\frac{3}{4}$$

Sin utilizar la definición:

$$f(x) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1\cdot(x-3) - x\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-3}{(1-3)^2} = \frac{-3}{4}$$

3. Hallar las siguientes derivadas aplicando la definición de derivada en los puntos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{x-3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$.

$f(h) = h^3 \quad f(0) = 0^3 = 0$

$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{h^3-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^2 = 0^2 = 0$

$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{\frac{h}{h-3}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \left(\dfrac{h}{h-3} : h\right) =$

$= \lim_{h\to 0^-} \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}(h-3)} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{1}{h-3} = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$

$f(h) = \dfrac{h}{h-3} \quad f(0) = 0^3 = 0$

No es derivable en $x=0$ $\quad f'(0^+) \neq f'(0^-)$

4. Hallar las derivadas de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x) = x^2$. $\longrightarrow f'(x) = 2x$

Recordad: $\boxed{y = x^n \rightarrow y' = n x^{n-1}}$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$\Downarrow$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

* $f(x) = x^{1/3} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3} x^{-2/3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{2/3}}$

$= \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\boxed{y = \sqrt[n]{x} \rightarrow y' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$

* $f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5. Hallar las derivadas de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$. $= \dfrac{1}{x^{1/5}} = x^{-1/5} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{5} x^{-\frac{1}{5}-1} = -\dfrac{1}{5} x^{-6/5} = \dfrac{-1}{5x^{6/5}} = \dfrac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \qquad \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

$= \dfrac{-1}{5x\sqrt[5]{x}}$

b) $f(x) = (x^3-4)^2$. Recordad: $\boxed{y = f(x)^n \rightarrow y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)}$

$\downarrow$

$f'(x) = 2(x^3-4) \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3-4) = 6x^5 - 24x^2$

$f(x) = (x^3-4)^2 = x^6 - 8x^3 + 16 \Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 24x^2$

6. Hallar las derivadas de las siguientes funciones dando la expresión simplificada:

a) $f(x)=\sqrt{x^3+2x^2}$.

Recordad: $\boxed{y=\sqrt{f(x)} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^3+2x^2}}\cdot(3x^2+4x)=\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{x^2+2x}$.

Recordad: $y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g(x)^2}$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)(x^2+2x)-(x^3-3x).(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{3x^4+6x^3-3x^2-\cancel{6x}-2x^4-2x^3+6x^2+\cancel{6x}}{(x^2+2x)^2}$$

$$=\frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x^2+2x)^2}=\frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x^2+2x)^2}$$

7. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^3-5)^{10}\sqrt{x^2-1}$.

$y=f(x)\cdot g(x)$
$y'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$
$y=f(x)^n \rightarrow y'=n\,f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{f(x)} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$

$$f'(x)=10(x^3-5)^9\cdot 3x^2\cdot\sqrt{x^2-1}+$$
$$+(x^3-5)^{10}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x$$
$$=x(x^3-5)^9\cdot\left[30x\sqrt{x^2-1}+\frac{x^3-5}{\sqrt{x^2-1}}\right]$$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^5-3x}{7x+4}}$.

$y=\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g(x)^2}$
$y=\sqrt{f(x)} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$

$35x^5+20x^4-21x-12-(7x^5-21x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^5-3x}{7x+4}}}\cdot\left[\frac{(5x^4-3)(7x+4)-(x^5-3x).7}{(7x+4)^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^5-3x}{7x+4}}}\cdot\frac{28x^5+20x^4-12}{(7x+4)^2}=$$

$$=\frac{14x^5+10x^4-6}{\sqrt{\frac{x^5-3x}{7x+4}}\,(7x+4)^2}$$

c) $f(x)=\left(\dfrac{x+5}{\sqrt{7x+3}}\right)^3$.

$y=f(x)^n \rightarrow y'=n.f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{f(x)} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
$y=\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g(x)^2}$

$$f'(x)=3\left(\frac{x+5}{\sqrt{7x+3}}\right)^2\cdot\left[\frac{1.\sqrt{7x+3}-(x+5)\cdot\frac{1.7}{2\sqrt{7x+3}}}{(\sqrt{7x+3})^2}\right]$$

$14x+6-(7x-35)$

$$=3\,\frac{(x+5)^2}{7x+3}\cdot\left[\frac{\sqrt{7x+3}-\frac{7(x+5)}{2\sqrt{7x+3}}}{7x+3}\right]=\frac{3(x+5)^2}{(7x+3)^2}\cdot\left[\frac{2(7x+3)-7(x+5)}{2\sqrt{7x+3}}\right]$$

$$=\frac{3(x+5)^2}{(7x+3)^2}\cdot\frac{7x+41}{2\sqrt{7x+3}}=\frac{3(x+5)^2\cdot(7x+41)}{2(7x+3)^2\sqrt{7x+3}}$$

8. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

$y=\log_a x \rightarrow y'=\frac{1}{x\cdot \ln a}$

$y=\log_a f(x) \rightarrow y'=\frac{1}{f(x)\cdot \ln a}\cdot f'(x)$

$y=\ln f(x) \rightarrow y'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

$y=\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$

a) $f(x)=\log_2 x$. $\rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}$

b) $f(x)=\log_5 x^2$.

$f'(x)=\frac{1}{x^2\cdot \ln 5}\cdot 2x=\frac{2}{x\cdot \ln 5}$

c) $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$.

$2x^2+2x \quad -(x^2+1)$

$f'(x)=\frac{1}{\frac{x^2+1}{x+1}}\cdot\left[\frac{2x(x+1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2}\right]=\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)}$

$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$

$(\ln e=1)$

9. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

$y=e^{f(x)} \rightarrow y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$

$y=A^{f(x)} \rightarrow y'=A^{f(x)}\cdot \ln A\cdot f'(x)$

$y=f(x)+g(x) \rightarrow y'=f'(x)+g'(x)$

a) $f(x)=e^{3x}+e^x$. $\rightarrow f'(x)=e^{3x}\cdot 3+e^x$

$=3e^{3x}+e^x$

$=e^x(3e^{2x}+1)$

b) $f(x)=2^x+5e^{2x}$.

$f'(x)=2^x\cdot\ln 2+5\cdot e^{2x}\cdot 2$

$=\ln 2\cdot 2^x+10e^{2x}$

10. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^{2x+1}$. derivada logarítmica

$y=f(x)^{g(x)} \rightarrow$ la derivada solo se resuelve aplicando logaritmos.

1) $\ln f(x)=\ln x^{2x+1}$ $\quad \ln a^b=b\cdot\ln a$

2) $\ln f(x)=(2x+1)\cdot\ln x$

3) derivamos: $\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=2\cdot\ln x+(2x+1)\cdot\frac{1}{x}$

4) Despejamos $f'(x)=f(x)\cdot\left[2\ln x+\frac{2x+1}{x}\right]$

5) $f(x)=x^{2x+1} \Rightarrow f'(x)=x^{2x+1}\cdot\left[2\ln x+\frac{2x+1}{x}\right]$

Recordad: $y = f(x)^{g(x)}$

1) Aplicamos logaritmos $\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$
2) Propiedad logaritmos: $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$
3) Derivamos: $\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
4) despejamos y':

$$y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right]$$

b) $f(x) = x^2 \overbrace{\operatorname{sen} xy}^{\operatorname{sen} x \cdot y} + x = 3.$ DERIVADA IMPLÍCITA

$y = f(x) \to$ la y es una función que depende de x.

OJO $\operatorname{sen}(x \cdot y) \to$ obligatorio paréntesis

$\operatorname{sen} x \cdot y \to \operatorname{sen} x \cdot y$

1ra manera:

$$\frac{dy}{dx}(\underbrace{x^2 \cdot \operatorname{sen} x} \cdot y + x) = \frac{dy}{dx} 3$$

$$(2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x) \cdot y + x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 \cdot \operatorname{sen} x) = -1 - (2x \operatorname{sen} x - x^2 \cdot \cos x) y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - (2x \operatorname{sen} x - x^2 \cdot \cos x) \cdot y}{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}$$

2da manera: Si es fácil despejar la y.

$$x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot y + x = 3$$

$$x^2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot y = 3 - x \longrightarrow y = \frac{3 - x}{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}$$

$$y' = \frac{-1 \cdot (x^2 \cdot \operatorname{sen} x) - (3 - x) \cdot (2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x)}{(x^2 \cdot \operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 \cdot \operatorname{sen} x - 6x \cdot \operatorname{sen} x - 3x^2 \cdot \cos x + 2x^2 \cdot \operatorname{sen} x + x^3 \cdot \cos x}{(x^2 \cdot \operatorname{sen} x)^2}$$

para comp. si da lo mismo sust $y = \frac{3-x}{x^2 \cdot \operatorname{sen} x}$ y hacemos operaciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1 - (2x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x) \cdot \frac{3-x}{x^2 \operatorname{sen} x}}{x^2 \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{-x^2 \cdot \operatorname{sen} x - (2x \operatorname{sen} x - x^2 \cdot \cos x)(3 - x)}{(x^2 \cdot \operatorname{sen} x)^2} = \frac{-x^2 \operatorname{sen} x - 6x \operatorname{sen} x + 2x^2 \operatorname{sen} x - 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cos x}{(x^2 \operatorname{sen} x)^2}$$

info@tuacademiafacil.com

4.1 DERIVADAS SUCESIVAS

$f(x) \longrightarrow f'(x)$ primera derivada
$\downarrow$
$f''(x)$ segunda derivada
$\downarrow$
$f'''(x)$ tercera derivada
$\downarrow$
$\vdots$
$\downarrow$
$f^{(n)}(x)$ derivada n-esima.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dxx} = \frac{d^2f}{dx^2}$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2$$
$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 6x + 2$$
$$f'''(x) = 60x^2 + 24x + 6$$
$$f^{IV}(x) = 120x + 24$$
$$f^{V}(x) = 120$$
$$f^{VI}(x) = 0 = f^{VII}(x) = f^{VIII}(x) = \dots$$

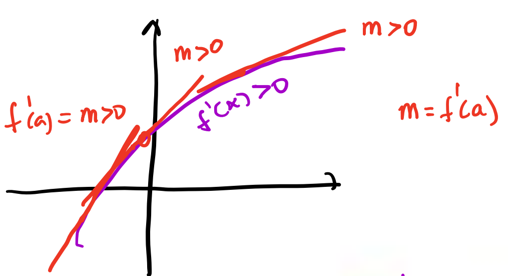
$$f(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$$

derivada cíclica

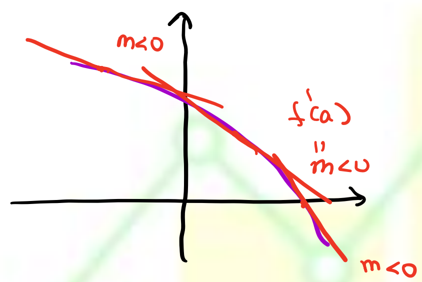
4.2 ANÁLISIS DE FUNCIONES

4.2.1 Crecimiento y decrecimiento de funciones (MONOTONÍA)

- Si $f'(x) \geq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow f(x)$ es creciente (a,b)
- Si $f'(x) < 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow f(x)$ decrece (a,b)



$m = f'(a)$



$f(x)$ creciente cuando $f'(x) > 0$

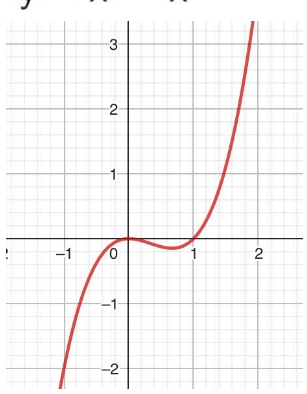
$f(x)$ decrece cuando $f'(x) < 0$

¿Cómo buscamos crecimiento y decrecimiento?

1) Hacemos la derivada $f(x)$
2) $f'(x) = 0$ resolvemos ecuación
3] Buscamos el dominio $f(x)$
4) los puntos del dominio y los puntos $f'(x) = 0$
5) Estudiamos el signo en cada intervalo.

Ejemplo

$y = x^3 - x^2$

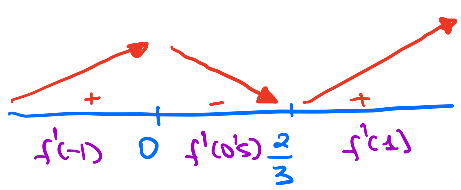


$y = x^3 - x^2$ $\quad$ $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 2x = 0$

$3x^2 - 2x = 0$

$x(3x-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 2 = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$



$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) = 5 > 0$

$f'(0'5) = 3\cdot 0'5^2 - 2\cdot 0'5 = -0'25 < 0$

$f'(1) = 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1 = 1 > 0$

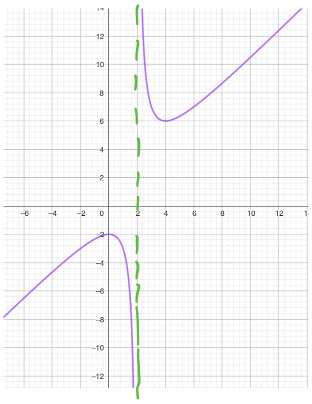
Conclusión

$f(x)$ crece: $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

$f(x)$ decrece: $(0, \frac{2}{3})$

info@tuacademiafacil.com

$$y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$



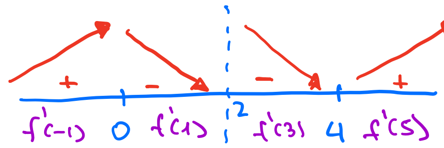
$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$y' = \frac{(2x-2)\cdot(x-2) - (x^2-2x+4)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - \cancel{2x} + \cancel{4} - x^2 + \cancel{2x} - \cancel{4}}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0\cdot(x-2)^2$$

$$\Rightarrow x^2-4x=0$$

$$x(x-4) = 0 < \begin{matrix} x=0 \\ x=4 \end{matrix}$$



$f'(-1) > 0$
$f'(1) < 0$

$f'(3) < 0$
$f'(5) > 0$

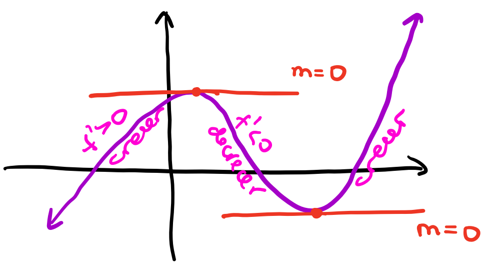
Conclusión:

$f(x)$ crece: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

$f(x)$ decrece: $(0,2) \cup (2,4)$

~~(0,4)~~ porque en el 2 la función no existe.

4.2.2 Máximos y mínimos locales o relativos



$m = f'(a)$

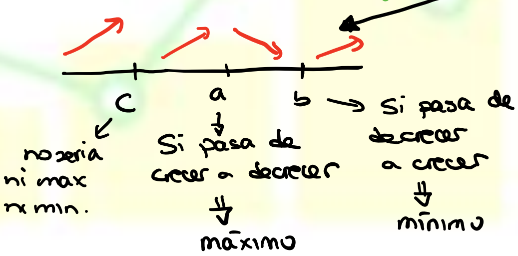
Para buscar máximos y mínimos relativos:

1) Dominio
2) $f'(x)$ derivamos
3) $f'(x) = 0 \Rightarrow$ posibles extremos (máx o mín)
4) Comp si son máx o mín o no son

(1)

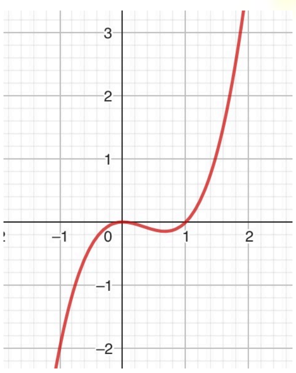
(2) Buscar las segundas derivadas.

$f''(a) > 0 \Rightarrow$ mínimo
$f''(a) < 0 \Rightarrow$ máximo.



Ejemplo:

$$y = x^3 - x^2$$



$\text{dom} f = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 2x = 0$

$x(3x-2) = 0 < \begin{matrix} x=0 \\ x=2/3 \end{matrix} \Big\}$ Posibles máx o mínimos

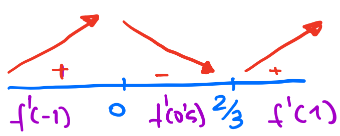
(2)

$f''(x) = 6x - 2$

$f''(0) = 6\cdot 0 - 2 < 0 \Rightarrow$ máximo

$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6\cdot\frac{2}{3} - 2 > 0 \Rightarrow$ mínimo

(1)



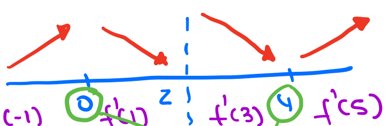
Conclusión $\Rightarrow$ En $x=0$ máximo $\Rightarrow y = 0^3 - 0^2 = 0$

En $x = 2/3$ mínimo $\rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$y' = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 < \begin{matrix} x=0 \\ x=4 \end{matrix}$$



$f'(-1) = +$
$f'(1) = -$

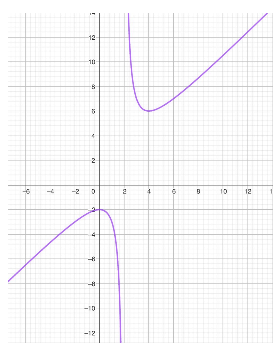
$f'(3) = -$
$f'(5) = +$

En $x=0$ máximo
En $x=4$ mínimo

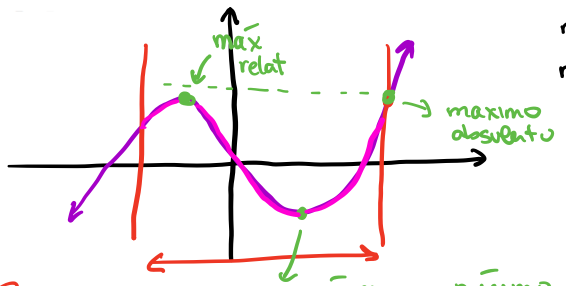
Conclusión:

En $x=0$ máximo
$(0, -2)$

En $x=4$ mínimo
$(4, f(4))$
$f(4) = 6$



4.2.3 Máximos y mínimos absolutos en un intervalo



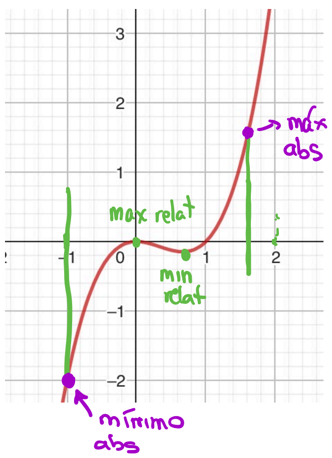
máximo absoluto ⇒ a $f(x) \le f(a)$ en todo el intervalo
mínimo absoluto ⇒ b $f(x) \ge f(b)$ en todo el intervalo

¿Como buscamos los máximos y mínimos absoluto? $[c, d]$

1) Primero buscamos los relativos y cogemos los que esten en el intervalo. $\to$ a, b
2) Cogemos los extremos del interval
3) $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ } Sustituimos en la función los valores de máx y mín relativos y los extremos del intervalo.
4) El valor mas grande ⇒ máx absoluto
El valor mas pequeño ⇒ mín absoluto.

Ejemplo

$y = x^3 - x^2$ $[-1, 1'5]$



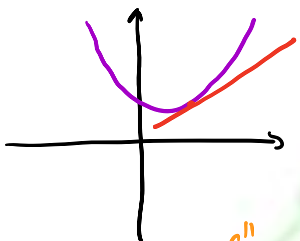
1) $y' = 3x^2 - 2x = 0$ → $x = 0$, $x = 2/3$
$0 \in [-1, 1'5]$ $\frac{2}{3} \in [-1, 1'5]$

2) $f(-1) = -2$ → mínimo abs
$f(1'5) = 1'125$ → máx abs.
$f(0) = 0$
$f(2/3) = -0'\overline{148}$

T. Weierstrass

$f(x)$ cont $[a,b]$ ⇒ Siempre existe el máx y mín absoluto.

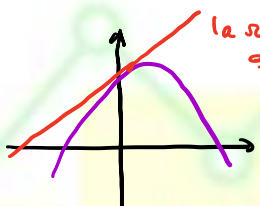
4.2.4 Curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión y $\boxed{\text{puntos críticos}}$ { máx relat, mín relat, puntos inf.



la recta tangente queda por debajo de la función

CONVEXA ⇒ $f''(x) > 0$
(Cóncava hacia arriba)

* Si $f''(x) > 0$, $\forall x$ del intervalo, $f(x)$ es convexa ∪ en el intervalo

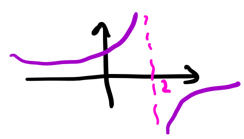


la recta tangente queda por encima de la función.

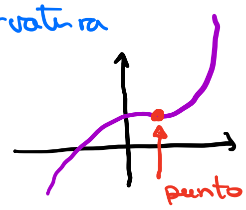
CONCAVA ⇒ $f''(x) < 0$
(Concava hacia abajo)

* Si $f''(x) < 0$, $\forall x$ del intervalo $f(x)$ es concava ∩ en el intervalo

¿Como buscamos la curvatura?
1) $f''(x)$
2) $f''(x) = 0$
3) Intervalos con los puntos $f''(x) = 0$ y los puntos del dominio

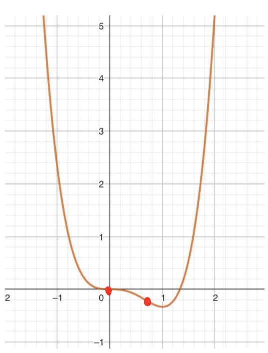


UN PUNTO de INFLEXIÓN ⇒ $f''(a) = 0$ y cambia de curvatura
$x = a$



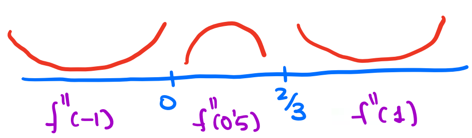
Ejemplo:

$y = x^4 - \frac{4x^3}{3}$



$f'(x) = 4x^3 - \frac{12x^2}{3} = 4x^3 - 4x^2$
$f''(x) = 12x^2 - 8x = 0$
$4x(3x - 2) = 0$ → $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$

dom $f = \mathbb{R}$



$f''(-1) > 0$ $f''(0'5) < 0$ $f''(1) > 0$

Conclusión:

∪ $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$
convexa

∩ $(0, 2/3)$
Concava

En $x = 0$ ⇒ punto inf $(0, 0)$ ← $f(0)$
En $x = \frac{2}{3}$ ⇒ punto inf $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3}{3}$

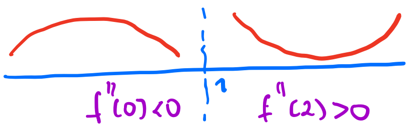
$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\boxed{(x-1)^2} - (x^2-2x)\cdot 2\boxed{(x-1)}}{\boxed{(x-1)^4}} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3}$$

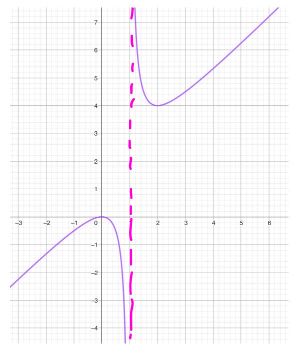
$$= \frac{2\cancel{x^2} - \cancel{2x} - \cancel{2x} + 2 - 2x^2 + \cancel{4x}}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ ¡¡ No hay puntos inf.}$$



Conclusión:

Cóncava $(-\infty, 1)$

Convexa $(1, +\infty)$

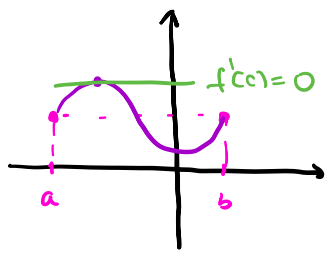


4.3 ALGUNOS TEOREMAS IMPORTANTES

4.3.1 Teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ cont } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \exists c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c) = 0$$

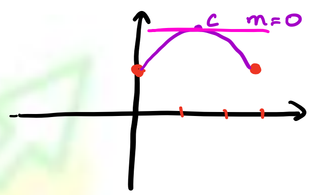
(existe al menos un valor)



Ejemplo:

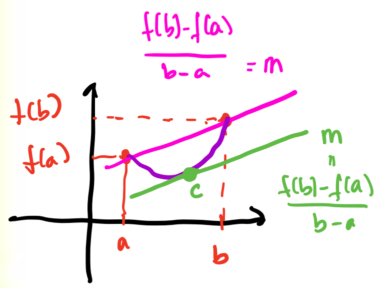
$f(x) = -x^2+3x+1$ intervalo $[0,3]$ si existe un valor $f'(c)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua } [0,3] \\ f(x) \text{ derivable } (0,3) \\ f(0) = -0^2+3\cdot 0+1 = 1 \\ f(3) = -3^2+3\cdot 3+1 = 1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{T. Rolle}} \exists c \in (0,3) \text{ tal que } f'(c) = 0$$



4.3.2 Teorema del valor medio (Lagrange)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ continua } [a,b] \\ f(x) \text{ derivable } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Ejemplo:

Túnel long 5Km $v = 80 Km/h$.

Coche que cuando entra $v = 75 Km/h$ a los 3m, cuando sale, $v = 70 Km/h$. ¿En algún momento el coche ha pasado de la velocidad permitida?

$a = 0$ momento entrada $\longrightarrow$ $d(0) = 0$ Km (está entrando y por tanto aún no ha recorrido nada del túnel).

$b = \frac{3}{60} = \frac{1}{20} = 0'05h$. a los 3 minutos $\longrightarrow$ $d(0'05) = 5$ Km (Cuando sale ha recorrido todo el túnel)

$$TVM = \frac{d(b) - d(a)}{b-a} = \frac{5-0}{0'05-0} = 100 \text{ Km/h}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ cont } [0, 0'05] \\ \text{deriv } (0, 0'05) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{T.V.M}} \text{Podemos asegurar } \exists c \in (0, 0'05) \text{ donde } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 100$$

Por lo tanto ha pasado el límite de velocidad.

4.3.3 Teorema de Cauchy o general del valor medio

$f(x)$ y $g(x)$ dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x),\ g(x) \text{ cont } [a,b] \\ f(x),\ g(x) \text{ deriv } (a,b) \\ (g(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tal que } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Ejemplo: $e^x \cdot \operatorname{sen} 2 + (1-e^2)\cos x = 0$ int $(0,2)$

$$\frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^2-1}{\operatorname{sen} 2} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=e^x \\ g(x)=\operatorname{sen} x \end{array}$$

Tanto $f(x)=e^x$, $g(x)=\operatorname{sen} x$

$$\left.\begin{array}{l} f,g \text{ cont } [0,2] \\ \text{deriv } (0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (0,2)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} = \frac{e^2-1}{\operatorname{sen} 2}$$

4.4 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1) Tenemos una función que hay que optimizar (maximizar o minimizar)
$\Downarrow$
depende de 2 variable

2) Tenemos una condición que nos relaciona estas 2 variable
$\Downarrow$
despejar la x o la y $\Rightarrow$ sustituir en la función que tenemos que optimizar

$y = f(x,y)$

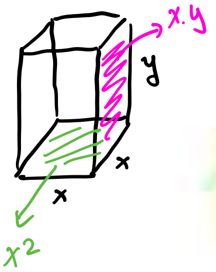
Condición $\Rightarrow y = g(x)$

$y = \underbrace{f(x, g(x))}_{h(x) \text{ max min}}$

$\Downarrow$

Acabamos teniendo una función de 1 variable $\Longrightarrow$ derivamos y igualamos a cero ....

Se quiere construir una caja abierta, es decir, sin tapadera, de base cuadrada y de volumen máximo donde la superficie de todas las caras sea de 2700 centímetros cuadrados. Hallar las dimensiones de cada una de las caras. (pág 217)



función optimizar $\Rightarrow V(x,y) = x^2 \cdot y$ máximizar, depende de dos variables: x, y

Condición $\Rightarrow A_{Total} = 2700\, cm^2$

$\Downarrow$

$x^2 + 4xy = 2700 \Rightarrow$ despejamos una incógnita

$\Downarrow$

$$\frac{2700-x^2}{4x} = y$$

Sustituyo la y en la función:

$$V(x,y) = x^2 \cdot y \Rightarrow V(x) = x^2 \cdot \frac{2700-x^2}{4x} = \frac{2700x - x^3}{4} \quad \text{maximizar}$$

$$y = \frac{2700-x^2}{4x}$$

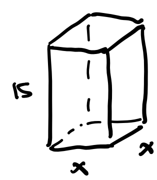
Hemos reducido el problema a buscar el maximo $V(x) = \dfrac{2700x - x^3}{4}$

$$V'(x) = \frac{2700-3x^2}{4} = 0 \Rightarrow 2700 - 3x^2 = 0 \quad \begin{array}{l} 2700 = 3x^2 \\ 900 = x^2 \\ x = 30\, cm \end{array}$$

$$y = \frac{f(x)}{k} \quad y' = \frac{f'(x)}{k}$$

Comp que es máximo

$$V''(x) = \frac{-6x}{4} \Rightarrow V''(30) = \frac{-6 \cdot 30}{4} < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$



$y = \dfrac{2700-900}{120} = 15$ cm

$x = 30$ cm

4.5 REGLA DE L´HÔPITAL

Sirve para buscar límites $\Rightarrow \frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$

Sea $f(x)$ y $g(x)$ derivables en (a,b). Donde $g(x)$, $g'(x)$ no se anula en ningun punto del intervalo

* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \overset{L'Hôp}{\Rightarrow} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'Hôp}{\Rightarrow} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (1)

* $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)}_{} = 0\cdot\infty$

$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind $\overset{L'Hop}{\Rightarrow}$ (1)

Ejemplos:

$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}}_{} = \frac{e^0-1}{0} = \frac{0}{0}$ Ind

$\Downarrow$ L'Hôpital

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$\underbrace{\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x}}_{} = \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind

$\Downarrow$ L'Hôpital

$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \infty$

$\underbrace{\lim_{x\to 0} x\cdot \ln x}_{} = 0\cdot\ln 0 = 0\cdot(-\infty)$ Ind

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{\infty}$ Ind

$\Downarrow$ L'Hôpital

$\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^5+x^2-2} = \frac{0}{0}$

Hasta ahora factorizabamos

$\Downarrow$

mucho mas facil utilizar l'Hopital

$\Downarrow$ L'Hôpital

$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{5x^4+2x} = \frac{3}{5+2} = \frac{3}{7}$

$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind.

$\Downarrow$ L'Hôpital

$\lim_{x\to \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind

$\Downarrow$ L'Hôpital

$\lim_{x\to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$

4.6 FÓRMULA DE TAYLOR Y MC LAURIN

Se denomina el polinomio de Taylor de grado n para $f(x)$ en $x=a$

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Error Polinomio Taylor

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\xi \in (a,x)$

Recordad $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\dots 1$

$0! = 1$ $\quad 3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$

$1! = 1$ $\quad 4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24$

$2! = 2\cdot1 = 2$

Ejemplo:

$f(x) = \ln x$ polinomio Taylor de grado 3 en $x=1$

$$P_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$P_3(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{(-1)}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3$$

$$= x-1 - \frac{1}{2}\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} + \frac{1}{3}\underbrace{(x-1)^3}_{x^3-3x^2+3x+1} = \boxed{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}}$$

$f(x) = \ln x \rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f''(1) = \frac{-1}{1} = -1$

$f'''(x) = \frac{-(-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$

Fórmula Mc Laurin $\Rightarrow$ fórmula Taylor en un entorno $a=0$

Ejemplo: Hallar Mc Laurin $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$f(0) = \frac{1}{(0+1)^2} = 1$

$-2\cdot1$

$f'(x) = \frac{0 - 1\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3} \rightarrow f'(0) = -2$

$3\cdot2\cdot1$

$f''(x) = \frac{0 + 2\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{6}{(x+1)^4} \rightarrow f''(0) = 6$

$-4\cdot3\cdot2\cdot1$

$f'''(x) = \frac{0 - 6\cdot 4(x+1)^3}{(x+1)^8} = \frac{-24}{(x+1)^5} \rightarrow f'''(0) = -24$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{(x+1)^{n+2}} \rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n\cdot(n+1)!$

$$\frac{(n+1)\cdot\cancel{n\cdot(n-1)\dots 1}}{\cancel{n\cdot(n-1)\dots 1}}$$

$$P_n(x) = 1 - 2x + \frac{6}{2!}x^2 + \frac{(-24)}{3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^n\cdot(n+1)\,x^n$$

AUTOEVALUACIÓN APLICACIÓN A LA DERIVADA

1. Al aplicar la regla de L'Hôpital, el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$ vale:

   a) 0.
   b) 1.
   c) ∞.

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ L'Hôpital.

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^\infty}{\infty^2} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind $\xRightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{e^\infty}{2\cdot\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ Ind

$\xRightarrow{L'Hôp} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{e^\infty}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$

2. La derivada primera de una función $f(x)$ permite conocer:

   a) Los intervalos de crecimiento de $f(x)$.
   b) Los intervalos de concavidad de $f(x)$.
   c) Solo los puntos críticos de $f(x)$.

$f'(x) > 0$ $f(x)$ crece

$f'(x) < 0$ $f(x)$ decrece

3. Se dice que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0 si:

   a) $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$.
   b) $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) = 0$.
   c) Es suficiente con que $f'(x) = 0$.

Recordad que un punto de inflexión:

$f''(x_0) = 0$

$f'''(x_0) \neq 0$

o

en x_0 cambia la curvatura.

4. La función $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 4$ tiene un punto de inflexión:

   a) En $x = 0$.
   b) En $x = 2$.
   c) En $x = 4$.

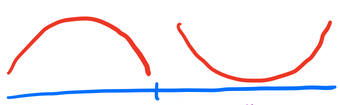
$f'(x) = 6x^2 - 24x$

$f''(x) = 12x - 24 = 0 \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow x = 2$ posible punto inf.

$f'''(x) = 12$ $f'''(2) = 12 \neq 0$

$\Rightarrow$ En $x = 2$ tenemos un punto de inflexión.

otra manera:



$f''(0) < 0$ ② $f''(4) > 0$

$\rightarrow$ es un punto $\rightarrow$ $f''(2) = 0$ $\Rightarrow$ P. Inf.
$\rightarrow$ donde cambia curvat

5. La recta tangente a $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 4$ en el punto de inflexión es:

en $x=2$

a) $y = -24x + 20$.

b) $y = \cancel{-80}x + 4$. $y=-16x+4$

c) No existe la tangente en un punto de inflexión.

* Punto en $x=2$

$f(2) = 2\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2 + 4$
$= -28$

recta tangente $\left.\begin{array}{l}(x_0, y_0)\\ m = f'(x_0)\end{array}\right\}$ $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

* $m = f'(2)$

$f'(x) = 8x^2 - 24x$

$f'(2) = 8\cdot 2^2 - 24\cdot 2 = -16$

$\left.\begin{array}{l}(2,-28)\\ m = f'(2) = -16\end{array}\right\}$ $y-(-28) = -16(x-2)$

$y = -16x + 4$

6. La función $f(x) = \dfrac{-3x}{x-4}$ es creciente:

a) En todo su dominio.

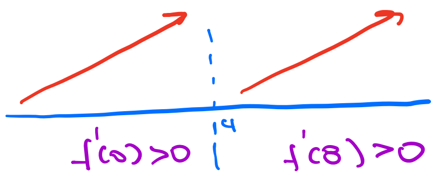
b) En $x > 4$.

c) En todo $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \dfrac{-3(x-4) - (-3x)\cdot 1}{(x-4)^2} = \dfrac{-\cancel{3x} + 12 + \cancel{3x}}{(x-4)^2}$

$f'(x) = \dfrac{12}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow 12 = 0$ ¡¡ No hay extremos relativos

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{4\}$



posibles extremos
puntos del dominio

observar $f'(x) = \dfrac{12}{(x-4)^2}$ + + $f'(x) > 0$ siempre crece

Conclusión

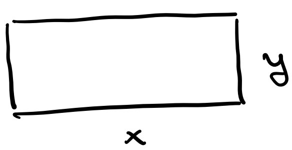
Crece $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty) \Rightarrow$ Crece en todo su dominio.

7. El rectángulo de perímetro 20 que tiene área máxima viene dado por:

a) $x = 5$ e $y = 5$.

b) $x = 15$ e $y = 5$.

c) $x = 5$ e $y = 15$.



Función optimizar

Área : $A(x,y) = x\cdot y$

Condición

Perímetro $= 20$

$x + y + x + y = 20$

$2x + 2y = 20$

$x + y = 10$

$y = 10 - x$

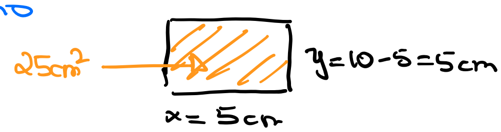
$A(x,y) = x\cdot y$

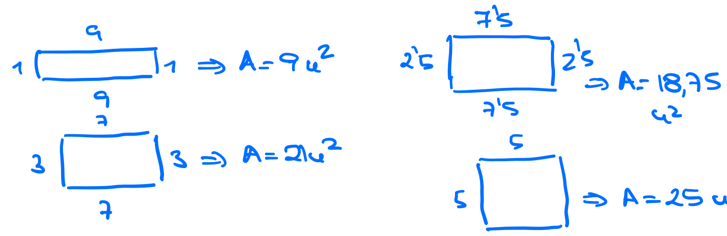
P: $y = 10 - x$

$A(x) = x(10-x) = 10x - x^2$ máxima

$A'(x) = 10 - 2x = 0$ $\quad 10 = 2x \quad x = 5$

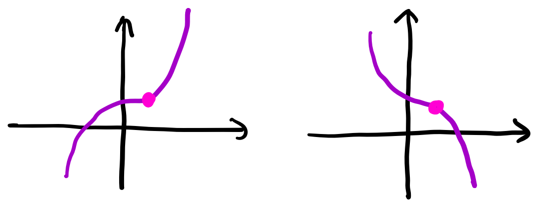
Comp. que es un máximo: $A''(x) = -2 < 0$ máximo





8. Si $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0 se **puede afirmar**:

   a) Que $f(x)$ es creciente en un entorno de x_0.
   b) Que $f(x)$ es decreciente en un entorno de x_0.
   c) No se puede concluir nada sobre su crecimiento.



9. Los extremos de $f(x) = x^3 - 3x - 1$ se alcanzan en:

   a) $x = 1$ y $x = -1$.
   b) $x = 1$.
   c) $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

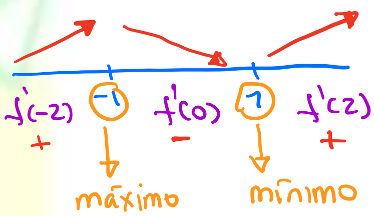
$3x^2 = 3 \quad x^2 = 1$

$x = \pm 1$ posibles máx o mínimos

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ En $x=1$ mínimo

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ En $x=-1$ máximo



10. La función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ es convexa en el intervalo:

   a) $(2, +\infty)$.
   b) $(-\infty, 2)$.
   c) $(-2, 2)$.

Buscamos $f''(x)$ → $f''(x) > 0$ ∪ convexa
→ $f''(x) < 0$ ∩ concava

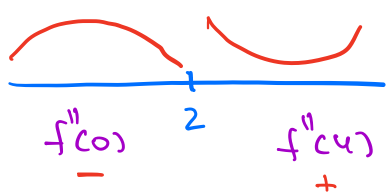
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f''(x) = 6x - 12 = 0$

$6x = 12$

$x = 2$ posible punto inf



Conclusión : ∩ concava $(-\infty, 2)$

∪ convexa $(2, +\infty)$

info@tuacademiafacil.com

PROBLEMAS APLICACIONES A LA DERIVADA

1. Hallar:

a) El polinomio de Taylor de tercer grado de $f(x) = xe^x$ en $x = 1$

b) Obtener el desarrollo de McLaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$. entorno $x=0$

a) $$\boxed{P_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3}$$

$f(x) = x\cdot e^x \Rightarrow f(1) = 1\cdot e = e$ $\quad f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x(1+x) \Rightarrow f'(1) = 2e$

$f''(x) = e^x(1+x) + e^x\cdot 1 = e^x(2+x) \Rightarrow f''(1) = 3e$ $\quad f'''(x) = e^x(2+x) + e^x\cdot 1 = e^x(3+x)$ $\quad f'''(1) = 4e$

$$P_3(x) = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{4e}{6}(x-1)^3$$

Sol: $\boxed{e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{2e}{3}(x-1)^3}$

b) $$\boxed{P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

$f(x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow f(0) = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = \frac{0 - 1\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \rightarrow f'(0) = 1$ $\quad f''(x) = \frac{0 - 1\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{0 - 2\cdot 3(1-x)^2\cdot(-1)}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4} \rightarrow f'''(0) = 6$

$f^{IV}(x) = \frac{0 - 6\cdot 4(1-x)^3\cdot(-1)}{(1-x)^8} = \frac{24}{(1-x)^5} \rightarrow f^{IV}(0) = 24$

$f'(0) = 1 = 1!$
$f''(0) = 2 = 2!$
$f'''(0) = 6 = 3!$
$f^{IV}(0) = 24 = 4!$
$f^{(n)}(0) = n!$

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n$$

Sol $\boxed{P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n}$

2. Obtener el desarrollo en serie de $f(x) = \cos x$ en un entorno de $x = 0$.

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

$f(x) = \cos x \rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$
$f'(x) = -\sin x \rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$
$f''(x) = -\cos x \rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$
$f'''(x) = \sin x \rightarrow f'''(0) = \sin 0 = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x \rightarrow \cos 0 = 1 = f^{IV}(0)$
$f^{V}(x) = -\sin x \rightarrow f^{V}(0) = -\sin 0 = 0$
$f^{VI}(x) = -\cos x \rightarrow f^{VI}(0) = -\cos 0 = -1$
$f^{VII}(x) = \sin x \rightarrow f^{VII}(0) = \sin 0 = 0 \ldots$

$$P_n(x) = 1 + \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{0}{7!}x^7 \ldots$$

Sol: $\boxed{P_n(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} \ldots = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!} x^{2n-2}}$

3. Hallar los máximos y mínimos relativos de las funciones:

a) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 7$. función polinómica $\Rightarrow$ dom $f = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & -12 & -4 & 12 \\ 1 & & 4 & -8 & -12 \\ \hline & 4 & -8 & -12 & 0 \end{array} \quad x = 1$$

$4x^2 - 8x - 12 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Posibles extremos

$x = 1 \quad x = -1 \quad x = 3$

1ra manera con $f''(x)$

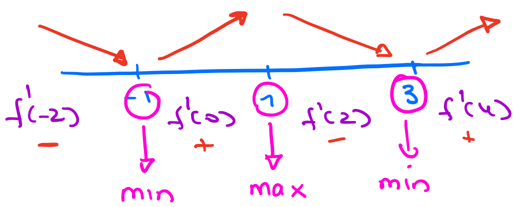
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(1) = 12 - 24 - 4 < 0 \Rightarrow$ En $x = 1$ máx.

$f''(-1) = 12 + 24 - 4 > 0 \Rightarrow$ En $x = -1$ mín

$f''(3) = 108 - 72 - 4 > 0 \Rightarrow$ En $x = 3$ mín

2na manera



Sol: $\boxed{\begin{array}{lll} \text{En } x = -1 & \text{mínimo} & (-1, f(-1)) \\ \text{En } x = 1 & \text{máximo} & (1, f(1)) \\ \text{En } x = 3 & \text{mínimo} & (3, f(3)) \end{array}}$

b) $y = x^4(1-x)^3$. dom $f = \mathbb{R}$

$$y' = 4\underbrace{x^3}_{x^3}\underbrace{(1-x)^3}_{(1-x)^2} + \underbrace{x^4}_{x^3} \cdot 3\underbrace{(1-x)^2}_{(1-x)^2} \cdot (-1) = x^3 \cdot (1-x)^2 \cdot [\overbrace{4 \cdot (1-x) - 3x}^{4-4x-3x}] =$$

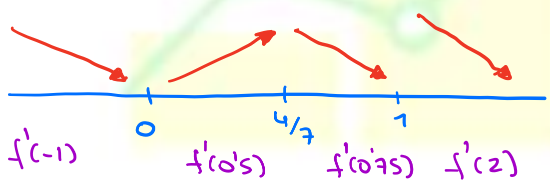
$$= x^3(1-x)^2(4-7x) = 0$$

$x^3 = 0 \rightarrow x = 0$

$(1-x)^2 = 0 \rightarrow 1 - x = 0$, $x = 1$

$4 - 7x = 0 \rightarrow x = 4/7$

Posibles extremos $x = 0 \quad x = 4/7 \quad x = 1$



Sol: $\boxed{\begin{array}{lll} \text{En } x = 0 & \text{mínimo} & (0, f(0)) = (0,0) \\ \text{En } x = 4/7 & \text{máximo} & \left(\frac{4}{7}, f\left(\frac{4}{7}\right)\right) \end{array}}$

$\rightarrow = \left(\frac{4}{7}, 0'008\right)$

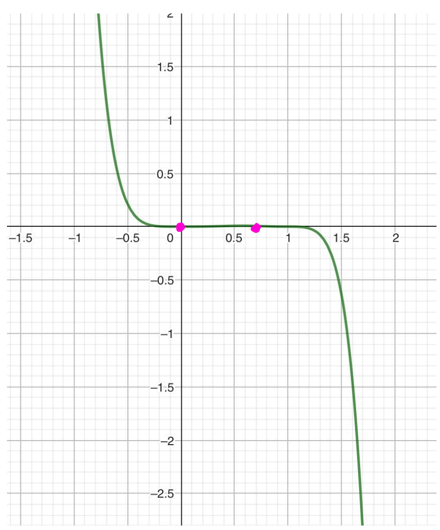
$f'(x) = x^3 \cdot (1-x)^2 \cdot (4-7x)$

$f'(-1) = - \cdot + \cdot + = -$

$f'(0'5) = + \cdot + \cdot + = +$

$f'(0'75) = + \cdot + \cdot - = -$

$f'(2) = + \cdot + \cdot - = -$



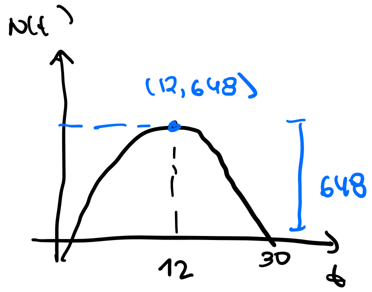
4. Las nevadas de principios de marzo han hecho que el nivel de nieve (altura en cm) siguiera la siguiente función:

$$N(t) = -2t^2 + 48t + 360$$

donde t son los días transcurridos desde que comenzó a nevar.

a) ¿En qué momento la altura de la nieve es mayor y qué altura alcanza?

b) ¿A partir de qué momento la altura empieza a decrecer? ¿En qué momento la nieve desaparece?



a) $N'(t) = -4t + 48 = 0 \quad 4t = 48 \quad t = 12$

$N''(t) = -4 < 0$ máximo

$N(12) = -2\cdot 12^2 + 48\cdot 12 + 360 = 648$

Sol: en el momento $t = 12$ y alcanza una altura 648 cm

b) Sol: Empieza a decrecer en $t = 12$

desaparece $\Rightarrow N(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 + 48t + 360 = 0$

$-t^2 + 24t + 180 = 0$

$t = \dfrac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4\cdot(-1)\cdot 180}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-24 \pm 36}{-2}$ $\nearrow -6$, $\searrow 30$

En el instante $t = 30$ la nieve desaparece (al cabo de 30 días)

5. Dada la función $f(x) = x^5 - 80x^2 + 3x$, hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto de inflexión.

1) Buscar el punto de inflexión

$f'(x) = 5x^4 - 160x + 3$

$f''(x) = 20x^3 - 160 = 0 \Rightarrow 20x^3 = 160 \Rightarrow x^3 = \frac{160}{20} = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'''(x) = 60x^2 \quad f'''(2) \neq 0 \Rightarrow$ En $x = 2$ tenemos un punto inflexión

2) Buscar la recta tangente de $f(x) = x^5 - 80x^2 + 3x$ en $x = 2$

a) Punto $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^5 - 80\cdot 2^2 + 3\cdot 2 = -282$

$(2, -282)$

b) pendiente $\Rightarrow m = f'(2) = 5\cdot 2^4 - 160\cdot 2 + 3 = -237$

$m = f'(2) = -237$

$\boxed{\left.\begin{matrix}(a,b) \\ m = f'(a)\end{matrix}\right\} \; y - b = f'(a)(x-a)}$

$\Rightarrow y - (-282) = -237\cdot(x-2)$

$y + 282 = -237x + 474$

$y = -237x + 192$

6. La gráfica de velocidad de un autobús en los 6 minutos previos a un accidente quedó recogida en el tacómetro, y se ajusta bastante bien a la siguiente función:

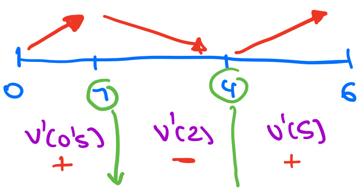
$$V(t) = 24t - 15t^2 + 2t^3 + 100,\ 0 \leq t \leq 6.$$

a) Especifique los intervalos de tiempo en que la velocidad aumentó y aquellos en que disminuyó.

b) Dibuje la gráfica de la función, especificando, si los hay, los puntos de inflexión. ¿En qué momentos se alcanza la mayor y menor velocidad?

a) $V'(t) = 24 - 30t + 6t^2 = 0$

$3t^2 - 15t + 12 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \dfrac{15 \pm 9}{6}$ → 4, 1



Sol: velocidad aumenta: $[0, 1) \cup (4, 6]$

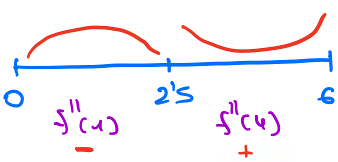
velocidad disminuye $(1, 4)$

b) En $x = 1$ máximo $(1, 111)$ (máximo relativo)

En $x = 4$ mínimo $(4, 84)$ (mínimo relativo)

$V''(t) = -30 + 12t = 0 \Rightarrow 30 = 12t \Rightarrow t = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

$V'''(t) = 12 \neq 0 \Rightarrow$ en $5/2$ punto inf $(2'5, 97'5)$



T. Weiers

$f(x)$ cont deriv en $[0, 6] \Rightarrow$ existe un máx, mín absoluto

$f(1) = 111$

$f(4) = 84$ → mínimo absoluto

$f(0) = 100$

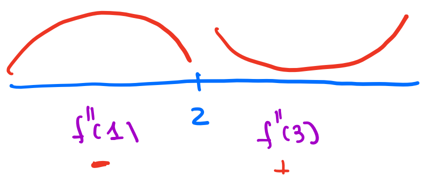
$f(6) = 136$ → máximo absoluto

7. Dada $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, determinar los intervalos de concavidad y convexidad.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$

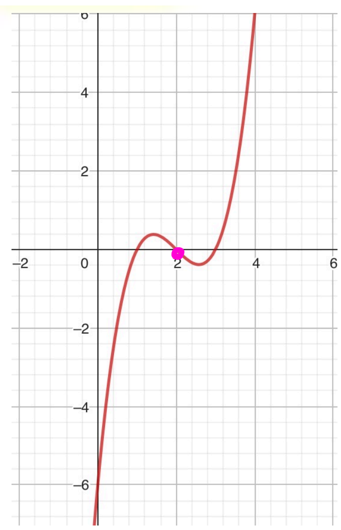
$f'''(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ En $x = 2$ punto de inflexión



Solución:

Concava $(-\infty, 2)$

Convexa $(2, +\infty)$



En $x = 2$ $(2, f(2))$

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$

8. Se considera la función

$$f(x) = -\frac{3x}{x-4} = \frac{-3x}{x-4}$$

a) Razone cuál es el dominio de definición de $f(x)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

c) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

d) Dibuje la gráfica de la función.

a) Dominio.

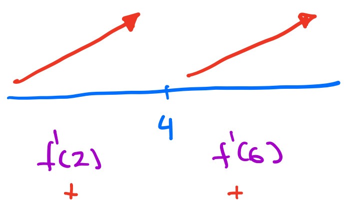
Como es una función racional

$x-4=0 \quad x=4$

$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

b) $$f'(x) = \frac{-3(x-4)-(-3x)\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-\cancel{3x}+12+\cancel{3x}}{(x-4)^2} = \frac{12}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow 12 = 0 \ !!!$$

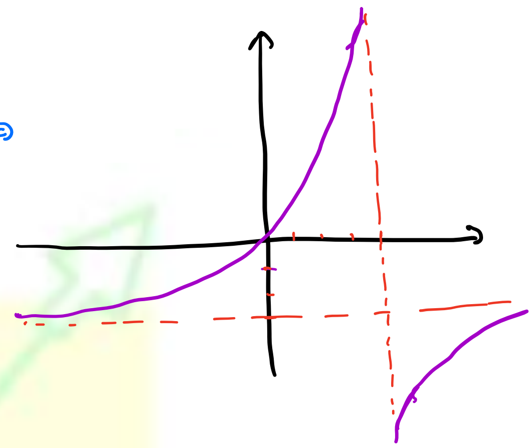
no hay máximos ni mínimos relativos



Sol:

Crece: $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

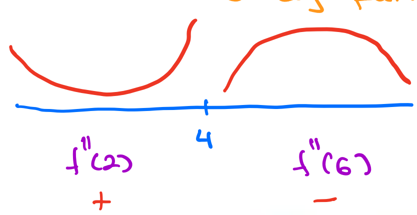
No hay máx ni mín relativos



c) $$f''(x) = \frac{0\cdot(x-4)^2 - 12\cdot 4(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{-48\,\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)^4}} = \frac{-48}{(x-4)^3} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -48 = 0 \ !!!$

no hay puntos de inflexión

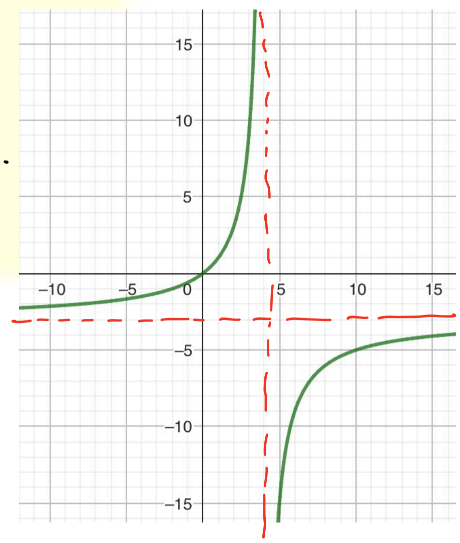


Sol:

convexa $(-\infty, 4)$

concava $(4, +\infty)$

No hay puntos de inf.



d) Gráfica de la función $\Rightarrow$ es importante saber asíntotas.

$f(x) = \dfrac{-3x}{x-4} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

A. verticales: en $x=4$ ya que:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{-3x}{x-4} = \frac{-12}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{-3x}{x-4} = \frac{-12}{0^-} = +\infty$$

A. Horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x}{x-4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x-4} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ Ind}$$

Tienen mismo grado $\dfrac{-3}{1} = -3$

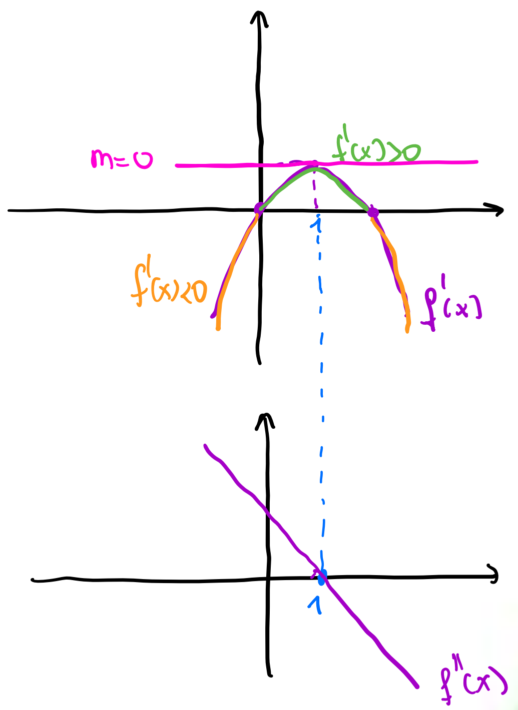
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x-4} = \frac{+\infty}{-\infty} \text{ Ind}$$

Tienen mismo grado $\dfrac{-3}{1} = -3$

En $y=-3$ A. Horiz.

9. De una función f se conoce que la gráfica de su derivada es la parábola con vértice (1, 1). Además, se sabe que pasa por los puntos (0, 0) y (2, 0). Sin realizar cálculos, halle razonadamente:

   a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   b) Los intervalos de concavidad y convexidad de f.
   c) Extremos relativos y los puntos de inflexión de f.



a) Crecimiento y decrecimiento

Si $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece

Si $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece

Crece $(0,2)$

decrece $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

b) Concavidad y convexidad.

Punto de inf $\Rightarrow f''(x)=0$

$f''(x)$ la recta tangente $f'(x)$
(pendiente)

Cuando la $f'(x)$ tiene pendiente 0.

Si $f''(x)>0 \Rightarrow f'(x)$ crece

Si $f''(x)<0 \Rightarrow f'(x)$ decrece

convexa $f''(x)>0$ $(-\infty,1)$

concava $f''(x)<0$ $(1,+\infty)$

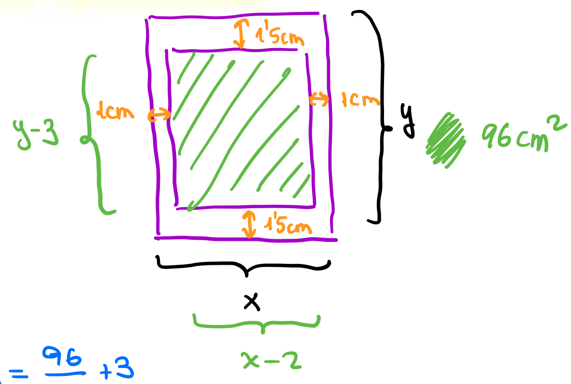
c) Extremos relativos $\Rightarrow f'(x)=0$

↳ en $x=0$ y en $x=2$

Puntos de inflexión $\Rightarrow f''(x)=0$

↳ en $x=1$

10. Raúl y Diana quieren fabricarse su propio cuaderno de apuntes de matemáticas con forma rectangular, y quieren minimizar el gasto en papel. Sabiendo que los márgenes laterales son de 1 cm cada uno y el superior e inferior de 1,5 cm cada uno y que el espacio para tomar apuntes ha de ocupar 96 cm^2, hallar las dimensiones del cuaderno.



Área papel $\Rightarrow$ función optimizar (minimizar)

$A(x,y)=x\cdot y$

Condición $\Rightarrow (x-2)\cdot(y-3)=96 \Rightarrow y-3=\dfrac{96}{x-2} \Rightarrow y=\dfrac{96}{x-2}+3$

$A(x)=x\cdot\left(\dfrac{96}{x-2}+3\right)=\dfrac{96x}{x-2}+3x=\dfrac{96x+3x(x-2)}{x-2}=\dfrac{96x+3x^2-6x}{x-2}=\dfrac{90x+3x^2}{x-2}$ mínimo

$A'(x)=\dfrac{(90+6x)\cdot(x-2)-(90x+3x^2)\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{\cancel{90x}-180+6x^2-12x-\cancel{90x}-3x^2}{(x-2)^2}=$

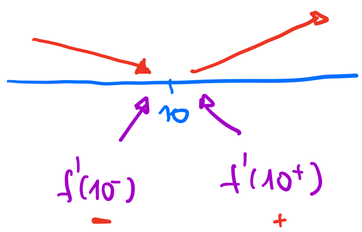
info@tuacademiafacil.com

$$= \frac{3x^2 - 12x - 180}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x - 180 = 0$$

$$x^2 - 4x - 60 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 16}{2} \begin{cases} \boxed{10} \\ -6 \ !!! \end{cases}$$

Tenemos que comp. que es mínimo.



$\Rightarrow$ En $x=10$ mínimo

$$y = \frac{96}{x-2} + 3$$

$$y = \frac{96}{8} + 3 = 15cm$$